

漸近展開

関数  $f(x)$  を  $x = 0$  のまわりで多項式によって近似することを考える. すなわち,  $f(x)$  にたいしてある  $n$  次多項式をうまく選び, その差が「 $n$  次より高次の無限小」であるようにしたい, すなわち,

$$f(x) = (n \text{ 次の多項式}) + (n \text{ 次より高次の無限小})$$

と表したい.

$x = 0$  のまわりで定義された関数  $\varepsilon(x)$  が,  $x \rightarrow 0$  としたとき  $0$  に近づいたら, すなわち  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  が成り立つなら,  $\varepsilon(x)$  は無限小であるという. 例として,  $n$  が自然数のとき, 関数  $x^n$  は無限小である. また,  $n$  が大きくなればなるほど,  $x^n$  が急速に  $0$  に近づく. そこで,  $\varepsilon(x)$  が  $n$  次より高次の無限小であることを  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x)}{x^n} = 0$  と定義する. すると,  $f(x)$  と  $g(x)$  の差が  $n$  次より高次の無限小であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^n} = 0$$

が成り立つことを意味する. これを  $f(x) = g(x) + o(x^n)$  と書く. これは  $f(x)$  と  $g(x)$  の差が  $n$  次より高次の無限小あることを表す 略記法 である. したがって, 関数  $f(x)$  を  $x = 0$  のまわりで多項式によって近似するとは

$$f(x) = (n \text{ 次の多項式}) + o(x^n)$$

と表すことである. この形の式を  $f(x)$  の  $x = 0$  のまわりでの 漸近展開 と呼ぶ. 通常は  $o(x^n)$  は「 $x^{n+1}$  以上の項」をひとくくりにしたものと考えて差し支えない.  $f(x)$  の漸近展開は  $x \rightarrow 0$  としたときの極限の計算に有用である. ただし,  $o(x^n)$  と近似計算の誤差項  $R_n(h)$  と混同してはならない.  $o(x^n)$  は  $x \rightarrow 0$  としたときの極限に関する性質であり, 誤差項  $R_n(h)$  では  $h$  は (無限小ではない) 有限の値をとり,  $R_n(h)$  も有限の値である. この記法を用いれば,  $f(x)$  が  $x = 0$  で微分可能であるとは

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$$

であることに他ならない. これは,  $f(x)$  と  $f(0) + f'(0)x$  の差の  $x \rightarrow 0$  としたときの極限が

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) = 0$$

となるからである.

これを拡張して,  $f(x)$  が  $x = 0$  で  $n$  階微分可能であるとき,  $f(x)$  は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

という漸近展開をもつことが証明できる. これを用いると, 例えば,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

がなり立つ.

裏の式はこれを用いてつくられた漸近展開である. 一般の関数の漸近展開はこれらの式から和・差・積・商および合成の操作を組み合わせて求めることができる.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

□1 次の関数の  $x=0$  のまわりの漸近展開を ( ) 内の次数の項まで求めよ.

a)  $\sqrt{1-x}$  ( $x^4$  の項まで)      b)  $\frac{1}{1+x^2}$  ( $x^6$  の項まで)      c)  $\frac{x}{1+x^3}$  ( $x^7$  の項まで)

d)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  ( $x^6$  の項まで)      e)  $\sqrt[3]{1+x^3}$  ( $x^9$  の項まで)      f)  $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$  ( $x^4$  の項まで)

□2 漸近展開を用いて次の極限を求めよ.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(x+1)}{x^2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - x - x^2}{x - \log(1+x)}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$