

高次微分を用いた近似計算

関数 $f(x)$ において x を微量 h としたとき、 $f(h)$ の値の近似値を求めることを考える。一般に、近似値を計算するとき、誤差の大きさがどれくらいの範囲にあるかが予めわかってないと意味がない。次のようにすると誤差がある範囲内に収まっていることを示すことができる。

さて、 $f(x)$ は何回でも微分可能な関数とする。 $f'(x)$ の原始関数は $f(x)$ であるから

$$\int_0^h f'(x) dx = [f(x)]_0^h = f(h) - f(0)$$

となる。これを書き直して

$$(1) \quad f(h) = f(0) + \int_0^h f'(x) dx$$

ここで、積分を（無理矢理）部分積分を用いて計算する。 $u = f'(x), v = x - h$ とおくと、 $du = f''(x)dx, dv = dx$ だから、

$$(2) \quad \int_0^h f'(x) dx = [f'(x)(x-h)]_0^h - \int_0^h (x-h)f''(x) dx = f'(0)h - \int_0^h (x-h)f''(x) dx$$

したがって、(??) の積分を (??) の最右辺で置き換えることにより

$$f(h) = f(0) + f'(0)h - \int_0^h (x-h)f''(x) dx$$

が得られる。さらに $u = f''(x), v = \frac{1}{2}(x-h)^2$ とおくと、 $du = f'''(x)dx, dv = (x-h)dx$ であり、

$$\begin{aligned} \int_0^h (x-h)f''(x) dx &= \left[\frac{1}{2}f''(x)(x-h)^2 \right]_0^h - \int_0^h \frac{1}{2}(x-h)^2 f'''(x) dx \\ &= -\frac{1}{2}f''(0)h^2 - \frac{1}{2} \int_0^h (x-h)^2 f'''(x) dx \end{aligned}$$

となる。これより、

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + \frac{1}{2} \int_0^h (x-h)^2 f'''(x) dx$$

が得られる。さらに $u = f'''(x), v = \frac{1}{2 \cdot 3}(x-h)^3$ とおくとこのように、これを繰り返していくと、

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^h (x-h)^n f^{(n-1)}(x) dx$$

が得られる。ここで、 $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ を k 回微分した関数である。最後の積分は簡単に計算できないが、いま $f^{(n-1)}(x)$ の $0 \leq x \leq h$ における最大値、最小値をそれぞれ M, m とすると、 $m \leq f^{(n-1)}(x) \leq M$ だから、

$$\int_0^h (x-h)^n m dx \leq \int_0^h (x-h)^n f^{(n-1)}(x) dx \leq \int_0^h (x-h)^n M dx$$

となる。 $\int_0^h (x-h)^n m dx = m \int_0^h (x-h)^n dx = m \left[\frac{1}{n}(x-h)^n \right]_0^h = \frac{m}{n}(-1)^n h^n$ などが成り立つので

$$\frac{m}{n!}h^n \leq \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^h (x-h)^n f^{(n-1)}(x) dx \leq \frac{M}{n!}h^n$$

が成り立つ。以上をまとめると次のようになる。

$f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし, h を正の数とする. $f(h)$ は

$$f(h) \doteq f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}h^{n-1}$$

と近似でき, その誤差 $R_n(h) = f(h) - \left(f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}h^{n-1} \right)$ は不等式

$$\frac{m}{n!}h^n \leq R_n(h) \leq \frac{M}{n!}h^n$$

をみたす. ただし, m, M は $f^{(n)}(x)$ の $0 \leq x \leq h$ における最小値, 最大値である.

例 $\sqrt{65} = \sqrt{64+1} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}}$ なので $f(x) = \sqrt{1+x}$ とおいて上の近似式を用いる. ここでは $n = 3$, $h = 1/64$ として近似値とそのときの誤差を求めてみる. 先ず微分を計算すると,

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = \frac{-1}{4(1+0)^{3/2}} = -\frac{1}{4}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

となる. したがって, 近似値は

$$\sqrt{65} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}} \doteq 8 \left(f(0) + f'(0)\frac{1}{64} + \frac{f''(0)}{2!} \left(\frac{1}{64} \right)^2 \right) = 8.0622558 \dots$$

また, $x \geq 0$ のとき, $(1+x)^{5/2} \geq (1+0)^{5/2} = 1$ であるから,

$$0 \leq f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

を得る. (すなわち, $f'''(x)$ は $x = 0$ のとき最大値 $3/8$ をとる. 一方, 最小値については正確な値はよくわからないが, 0 以上であることはすぐにわかる. この問題ではそれで十分である.) したがって, 近似の誤差は, 上の式を用いて

$$0 \leq 8R_3\left(\frac{1}{64}\right) \leq 8 \frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!} \left(\frac{1}{64}\right)^3 \doteq 0.00000190 \dots$$

と評価できる. すなわち,

$$8.0622558 \dots \leq \sqrt{65} \leq 8.0622558 \dots + 0.0000019 \dots = 8.0622577 \dots$$

となる. これより, $\sqrt{65}$ の小数点以下第 5 位までの値は 8.06225 であることがわかる.

① $\sqrt{26}$ の値を小数点以下 3 桁まで求めよ.

② a) α を正の実数とすると, $1+\alpha$ の立方根 $\sqrt[3]{1+\alpha}$ を $1 + \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^2}{9}$ で近似したときの誤差の範囲を評価せよ.

b) $\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$ という表示と a) の近似式を応用して $\sqrt[3]{9}$ の近似値を計算せよ. また, このようにして得られた近似値と $\sqrt[3]{9}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか.

③ $f(x) = e^x$, $h = 1$, $n = 6$ として e の近似値を求め, 誤差の範囲を評価せよ.