入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

以下の問題は，公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを系統的に証明することである．したがって，すでに証明された場合以外，この公式を用いて答えてはならない．

1 【n が自然数の場合】任意の自然数 n について $f_n(x) = x^n$ とおく．$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい．

(I) $n = 1$ のとき．$f_1(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1{}'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると，$f_k{}'(x) = kx^{k-1}$．いま，$f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから，積の微分公式を用いて，

$$f_{k+1}{}'(x) = (f_1(x)f_k(x))' = f_1'(x)f_k(x) + f_1(x)f_k'(x)$$
$$= 1 \times f_k(x) + f_1(x)\cdot kx^{k-1}$$
$$= x^k + kx^k$$
$$= (k+1)x^k$$

したがって $n=k+1$ のときにも成り立つ

(I)(II) よりすべての自然数 n について $f_n'(x) = nx^{n-1}$ が成り立つ

［結論まできちんと述べよ．］

2 【n が負の整数の場合】

a) 商の微分公式を用いて $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ．

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

b) $(x^{-n})'$ を ax^b の形に表せ．

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-(n+1)} = -nx^{-n-1}$$

3 【$a = 1/n$ の場合】$f(x) = x^n$ とすると，関数 $\sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x)$ の逆関数である．すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．

a) 逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$ であることを示せ．

$f(x) = x^n$ のとき $f'(x) = nx^{n-1}$ だから

$$(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより $(x^{\frac{1}{n}})'$ を ax^b の形に表せ．

$$(x^{\frac{1}{n}})' = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}}$$
$$= \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

4 【a が有理数の場合】$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ であることを用い，合成関数の微分公式を用いて $(x^{\frac{m}{n}})'$ を ax^b の形に表せ．

$y = u^{\frac{1}{n}}$，$u = x^m$ とおくと $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}$，$\dfrac{du}{dx} = mx^{m-1}$

$$\therefore (x^{\frac{m}{n}})' = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1} \times mx^{m-1} = \frac{1}{n}(x^m)^{\frac{1}{n}-1} \times mx^{m-1}$$
$$= \frac{m}{n}x^{m(\frac{1}{n}-1)+m-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-m+m+1}$$
$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

5 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2+3}$

$f'(x) = \dfrac{(4x-1)'(x^2+3) - (4x-1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$

$= \dfrac{4(x^2+3) - (4x-1)\times 2x}{(x^2+3)^2}$

$= \dfrac{-4x^2+2x+12}{(x^2+3)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2-2x+3}$

$f'(x) = \dfrac{-2x(x^2-2x+3) - (4-x^2)(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2}$

$= \dfrac{-2x^3+4x^2-6x+2x^3-2x^2-8x+8}{(x^2-2x+3)^2}$

$= \dfrac{2x^2-14x+8}{(x^2-2x+3)^2}$

c) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{3}+2x-5\right)^4$

$f'(x) = 4\left(\dfrac{x^3}{3}+2x-5\right)^3\left(\dfrac{x^3}{3}+2x-5\right)'$

$= 4\left(\dfrac{x^3}{3}+2x-5\right)^3 \times (x^2+2)$

$= 4(x^2+2)\left(\dfrac{x^3}{3}+2x-5\right)^3$

d) $f(x) = (x+1)\sqrt{2-x}$

$f'(x) = (x+1)'\sqrt{2-x} + (x+1)\left(\sqrt{2-x}\right)'$

$= \sqrt{2-x} + (x+1)\times\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}(2-x)'$

$= \sqrt{2-x} - \dfrac{(x+1)}{2\sqrt{2-x}}$

$\left(= \dfrac{3-3x}{2\sqrt{2-x}}\right)$

e) $f(x) = \sqrt[4]{(x^2+x+1)^5}$

$f'(x) = \left((x^2+x+1)^{\frac{5}{4}}\right)'$

$= \frac{5}{4}(x^2+x+1)^{\frac{1}{4}} \times (x^2+x+1)'$

$= \dfrac{5(2x+1)}{4\sqrt[3]{(x^2+x+1)^5}}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

$f'(x) = \left((x^2-2x)^{-\frac{1}{2}}\right)'$

$= -\frac{1}{2}(x^2-2x)^{-\frac{3}{2}} \times (x^2-2x)'$

$= -\frac{1}{2}\times(2x-2)\times\dfrac{1}{\sqrt{(x^2-2x)^3}}$

$= \dfrac{1-x}{\sqrt{(x^2-2x)^3}}$

a を正の数としたとき，指数関数 $f(x)=a^x$ の導関数を求めたい．そのために，まず，$f(x)=a^x$ の $x=0$ における微分係数を求める．その定義式は

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{a^h-1}{h}}$$

である．そこで実験として $a=2$ と $a=3$ のときに $\dfrac{a^h-1}{h}$ の値の数値計算をしてみる．$\sqrt{\ }$ 機能のある電卓などを用いて，$2^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{1.414\cdots}$，$2^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \ldots$ などと計算して，下の表を作ると

h	$\dfrac{2^h-1}{h}$	$\dfrac{3^h-1}{h}$
$\frac{1}{2}$	$(1.41421356\ldots-1)\times 2 = 0.82842712\ldots$	$(1.73205080\ldots-1)\times 2 = 1.4641016\ldots$
$\frac{1}{4}$	$(1.18920711\ldots-1)\times 4 =$	$(1.31607401\ldots-1)\times 4 =$
$\frac{1}{8}$	$=$	$=$
$\frac{1}{16}$	$=$	$=$
$\frac{1}{32}$	$=$	$=$
$\frac{1}{64}$	$=$	$=$
$\frac{1}{128}$	$=$	$=$
$\frac{1}{256}$	$=$	$=$
$\frac{1}{512}$	$=$	$=$
$\frac{1}{1024}$	$=$	$=$
$\vdots$	$\downarrow$	$\downarrow$
0		

この表より $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h} = \boxed{}$，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h} = \boxed{}$ と推測できる．

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)