入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

● 合成関数の微分公式（連鎖律）

2つの微分可能な関数 $y=f(u)$ と $u=g(x)$ の合成関数 $y=f\big(g(x)\big)$ の導関数を $y=f(u)$，$u=g(x)$ の導関数で表したい．いま，

x の増分 Δx に対する u の増分を Δu，

u の増分 Δu に対する y の増分を Δy

とする．すなわち，

$$\Delta u = g(x+\Delta x)-g(x),$$
$$\Delta y = f(u+\Delta u)-f(u)$$

と定義する．ここで，求めたいのは $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の $\Delta x\to 0$ としたときの極限である．$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は少々無理矢理 Δu を間に挟むと，

(*)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

と書ける．この両辺の $\Delta x\to 0$ とした極限を考える．ここで $u=g(x)$ が微分可能な関数であることから，$\Delta x\to 0$ のとき $\Delta u\to 0$ となるので，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\boxed{\Delta u\to 0}}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

が成り立つ．これより，合成関数の微分公式の一つの形である次の式が得られる．

$$\frac{dy}{dx}=\boxed{\frac{dy}{du}}\cdot\boxed{\frac{du}{dx}}$$

合成関数の微分公式を，$'$ を用いた記法で表すことを考えよう．合成関数 $f\big(g(x)\big)$ の導関数 $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'$ は

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta)\big)-f\big(g(x)\big)}{\Delta x}$$

で定義される．ここで，$u=g(x)$ としたとき，$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$ であったから，

$$g(x+\Delta x)=u+\Delta u$$

と書ける．したがって，$g(x+\Delta x)$，$g(x)$ をそれぞれ，$u+\Delta u$，u で置き換えて

$$f\big(g(x+\Delta x)\big)-f\big(g(x)\big)=\boxed{f(u+\Delta u)-f(u)}$$

と書くことができる．そして，(*) と同様に Δu を間に挟むことにより

$$\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big)-f\big(g(x)\big)}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\boxed{g(x+\Delta x)-g(x)}}{\Delta x}$$

となる．この両辺において $\Delta x\to 0$ とすると，$\Delta u\to 0$ だから，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big)-f\big(g(x)\big)}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

ここで，

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}=\boxed{f'(u)},\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\boxed{g'(x)}$$

だから，

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'=\boxed{f'(u)}\cdot\boxed{g'(x)}$$

$f'(u)$ を x で表すと $f'(u)=f'(g(x))$ と書き直せるので，次の合成関数の微分公式が得られる．

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'=\boxed{f'(g(x))\,g'(x)}$$

● 逆関数の微分公式

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の微分公式を導きたい．関数 $f(x)$ の逆関数とは，$g\big(f(x)\big)=f\big(g(x)\big)=x$ をみたす関数 $g(x)$ に他ならない．そこで，$f(g(x))=x$ の両辺を合成関数の微分法を用いて微分すると，

$$\text{左辺}=\boxed{f'(g(x))\,g'(x)},\qquad \text{右辺}=(x)'=1$$

となるから，

$$\boxed{f'(g(x))\,g'(x)}=1$$

これを $g'(x)$ について解くと，

$$g'(x)=\frac{1}{\boxed{f'(g(x))}}$$

$g(x)$ を $f^{-1}(x)$，$g'(x)$ を $\big(f^{-1}(x)\big)'$ と書き直すことにより，逆関数の導関数の公式が得られる．

$$\big(f^{-1}(x)\big)'=\frac{1}{\boxed{f'(f^{-1}(x))}}$$

【裏に続く】

1 $\left(f\left(g(h(x))\right)\right)'$ を求めよ.

$$\left(f(g(h(x)))\right)' = f'(g(h(x)))\left(g(h(x))\right)'$$
$$= f'(g(h(x)))\,g'(h(x))\,h'(x)$$

2 $(g(x)^2)'$ を求めよ.

$f(x)=x^2$ とすると $f'(x)=2x$ だから

$$(g(x)^2)' = (f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$
$$= 2g(x)\,g'(x)$$

3 $f(x)=x^2$ としたとき, $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ である. 逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt{x})'$ を求めよ.

$f'(x)=2x$ だから

$$(\sqrt{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4 前問と同様にして $(\sqrt[3]{x})'$ を求めよ.

$f(x)=x^3$ とすると $f'(x)=3x^2$ だから

$$(\sqrt[3]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

5 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (1-2x^2)^3$

$$f'(x) = 3(1-2x^2)^2 \times (1-2x^2)'$$
$$= -12x(1-2x^2)^2$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$

$$f'(x) = \left((4x+3)^{-2}\right)'$$
$$= -2(4x+3)^{-3}(4x+3)'$$
$$= \frac{-8}{(4x+3)^3}$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

$$f'(x) = \left((x^2+1)^{-3}\right)'$$
$$= -3(x^2+1)^{-4}(x^2+1)'$$
$$= \frac{-6x}{(x^2+1)^4}$$

d) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$$f'(x) = 3\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2\left(x^2-\frac{1}{x}\right)'$$
$$= 3\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 3\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2$$

e) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$$f'(x) = (x)'\sqrt{x+1} + x\left(\sqrt{x+1}\right)'$$
$$= \sqrt{x+1} + x \times \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}(x+1)'$$
$$= \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$$
$$= \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

f) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$$f'(x) = \left((9-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'$$
$$= \frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}(9-x^2)'$$
$$= \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-x+1}$

$$f'(x) = \left((x^2-x+1)^{\frac{1}{3}}\right)'$$
$$= \frac{1}{3}(x^2-x+1)^{-\frac{2}{3}}(x^2-2x+1)'$$
$$= \frac{2x-2}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'$$
$$= -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x^2)'$$
$$= \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$