入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とする.

a) $f(x)$ の定義域を述べよ.

対数の真数条件，分母が0にならない条件をあわせて

定義は $x>0$

b) 関数 $f(x)$ の増減表を書き，増減を調べよ.（凹凸は調べなくてよい.）

$$f'(x) = \frac{(\log x)'\cdot x - \log x\cdot (x)'}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

$f'(x)=0 \iff 1-\log x = 0 \iff x=e$

$f'(x)>0 \iff 1-\log x>0 \iff x<e$

x	0	$\cdots$	e	
$f'(x)$	×	+	0	−
$f(x)$	×	↗	極大	↘

c) b) の結果を用い，$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ を示せ.

b) より $x \geqq e$ で 関数 $\dfrac{\log x}{x}$ は減少.

$e<\pi$ だから $\dfrac{\log e}{e} > \dfrac{\log \pi}{\pi}$

d) c) の結果を用い，π^e と e^π のどちらが大きいかを示せ.［ヒント：$\log \pi^e$ と $\log e^\pi$ の大小を比較せよ.］

$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ の両辺に πe をかけると

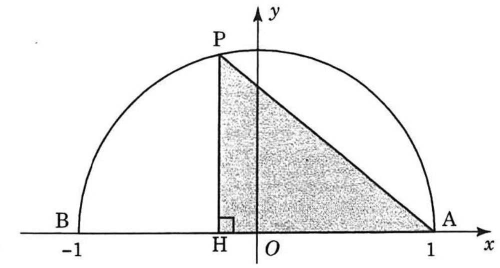
$e\log \pi < \pi \log e$

$\therefore \log \pi^e < \log e^\pi$

$\log x$ は増加関数だから $\log a < \log b \iff a<b$

$\therefore \pi^e < e^\pi$

2 長さ2の線分 AB を直径とする半円の周上の動点を $P(x, y)$ とし，P から AB 下ろした垂線の足を H とする.



a) △APH の面積 S を x で表せ.

$S = \frac{1}{2} AH\cdot PH$

AH の長さは $1-x$.

P は 半円 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上の点だから

$PH = \sqrt{1-x^2}$

$\therefore S = \frac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}$

（xのとり得る値の範囲は $-1 \leqq x \leqq 1$）

b) S の最大値を求めよ.

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}\left((1-x)'\sqrt{1-x^2} + (1-x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1-x^2} + (1-x)\times\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(1-x^2)'\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1-x^2} + \frac{-x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{-1-x+2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(x-1)(2x+1)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$\frac{dS}{dx}$	×	+	0	−	×
S	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↘	0

$x=-\frac{1}{2}$ のとき S は最大で

最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{x^2-4x+1}{x^2+1}$ とする.

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$$f(x) = 1 - \frac{4x}{x^2+1} \quad \text{だから}$$

$$f'(x) = -4\left(\frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{-4(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = 4\,\frac{(x^2-1)'(x^2+1)^2 - (x^2-1)\left((x^2+1)^2\right)'}{(x^2+1)^4}$$

$$= 4\cdot\frac{2x(x^2+1)^{\cancel{2}} - (x^2-1)\times 2\cancel{(x^2+1)}\times 2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{8x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

b) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ. また, $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$$f'(x) = \frac{4(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \iff x^2-1=0 \iff x = \pm 1,$$

$$\frac{4(x^2-1)}{(x^2+1)^2} > 0 \iff x^2-1>0 \iff x<-1,\ x>1$$

c) $f''(x) = 0$ となる x を求めよ. また, $f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$$f''(x) = \frac{8x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \iff 3-x^2=0 \iff x = \pm\sqrt{3}$$

$$\frac{8x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} > 0 \iff x(3-x^2)>0$$

$$\iff -x^3+3x>0$$

$$\iff -\sqrt{3}<x,\ 0<x<\sqrt{3}$$

$+$ $-\sqrt{3}$ $-$ 0 $+$ $\sqrt{3}$ $-$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ. (増減だけでなくグラフの凹凸も調べること.)

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$1+\sqrt{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$1-\sqrt{3}$	$\nearrow$
		変曲点		極大		変曲点		極小		変曲点	

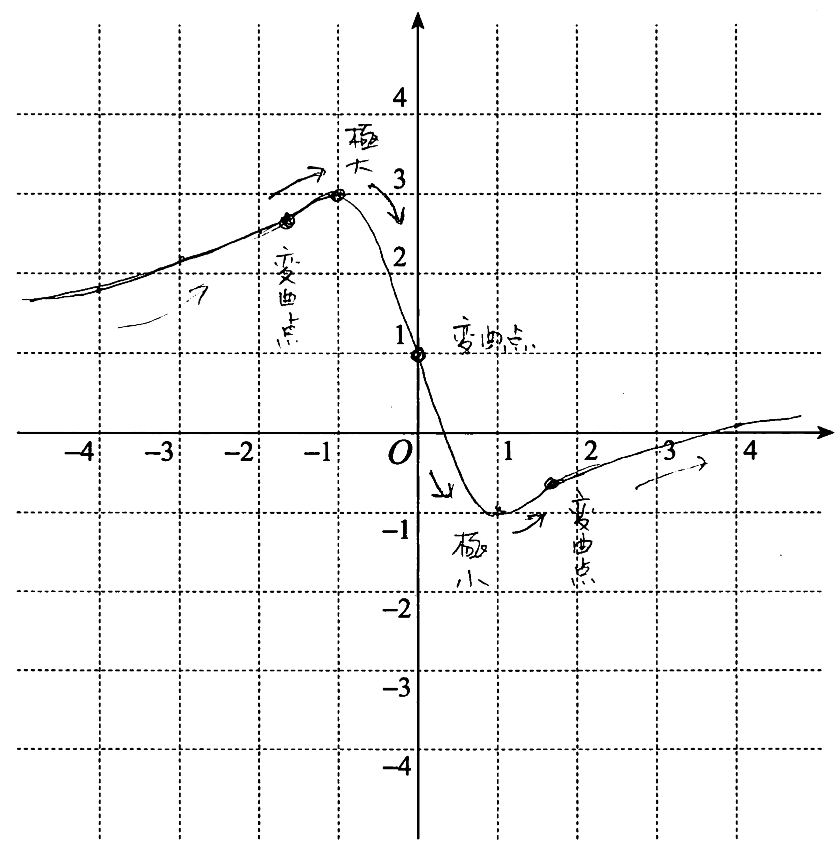
e) $f(x)$ が極大・極小となる点, および変曲点を求めよ.

極大となる点 $x = -\sqrt{3}$

極小となる点 $x = +\sqrt{3}$

変曲点 $(-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$, $(0, 1)$, $(\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$

f) $f(x)$ のグラフをなるべく丁寧に描け.



担当: 鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)