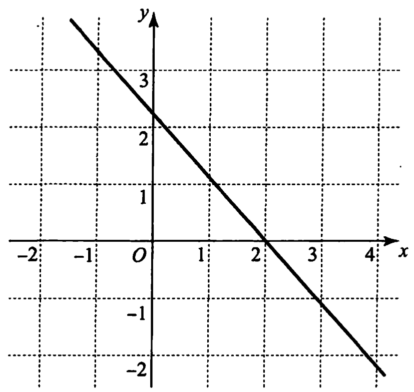
入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

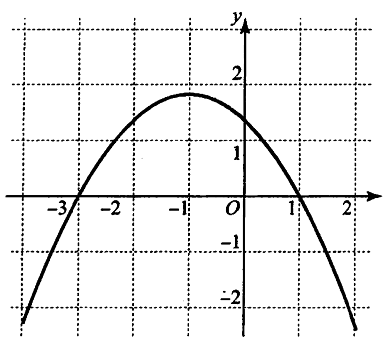
1　次の各々のグラフは関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の概形を示したものである．それぞれの関数 $f(x)$ の増減表を書いて，$y=f(x)$ のグラフの凹凸を調べよ．（凹凸は曲がった矢印 ⤴ ↱ ↳ ⤵ で表すこと．）

a)



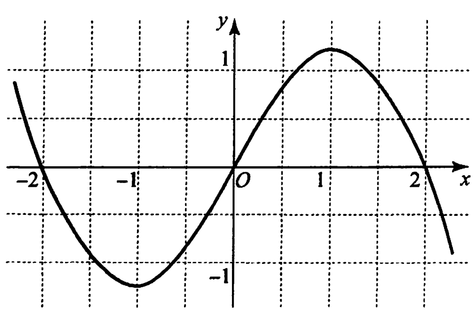
x	⋯	2	⋯
$f'(x)$	+	0	−
$f''(x)$	−	−	−
$f(x)$	↱	極大	⤵

b)



x	⋯	−3	⋯	−1	⋯	1	⋯
$f'(x)$	−	0	+	+	+	0	−
$f''(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f(x)$	↳	極小	⤴	変曲点	↱	極大	⤵

c)



x	⋯	−2	⋯	−1	⋯	0	⋯	1	⋯	2	⋯
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−
$f(x)$	↱	極大	⤵	変曲点	↳	極小	⤴	変曲点	↱	極大	⤵

2　$f(x)=x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-x-2$ とする．

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と２次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$$f'(x)=4x^3+x^2-4x-1$$

$$f''(x)=12x^2+2x-4$$

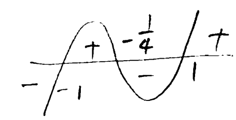
b) $f'(x)=0$ となる x を求めよ．また，$f'(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f'(x)=4x^3+x^2-4x-1=4(x^3-x)+(x^2-1)$$

$$=4x(x^2-1)+(x^2-1)=(4x+1)(x-1)(x+1)$$

$$f'(x)=0 \iff x=1,-1,-\frac{1}{4}$$

$$f'(x)>0 \iff -1<x<-\frac{1}{4},\ x>1$$



c) $f''(x)=0$ となる x を求めよ．また，$f''(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f''(x)=12x^2+2x-4=2(6x^2+x-2)=2(3x+2)(2x-1)$$

$$f''(x)=0 \iff x=-\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}$$

$$f''(x)>0 \iff x<-\frac{2}{3},\ x>\frac{1}{2}$$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ．（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること．）

x	⋯	−1	⋯	$-\frac{2}{3}$	⋯	$-\frac{1}{4}$	⋯	$\frac{1}{2}$	⋯	1	⋯
$f'(x)$	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	↳	極小	⤴	変曲点	↱	極大	⤵	変曲点	↳	極小	⤴

3 $f(x) = (x-1)e^{x+1}$ とする.

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と2次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = (x-1)'e^{x+1} + (x-1)(e^{x+1})'$$
$$= e^{x+1} + (x-1)e^{x+1}$$
$$= xe^{x+1}$$
$$f''(x) = (x)'e^{x+1} + x(e^{x+1})'$$
$$= (x+1)e^{x+1}$$

b) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ．また，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$e^{x+1} > 0$ であることに注意して

$$f'(x) = xe^{x+1} = 0 \iff x = 0$$
$$xe^{x+1} > 0 \iff x > 0$$

c) $f''(x) = 0$ となる x を求めよ．また，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$$f''(x) = (x+1)e^{x+1} = 0 \iff x = -1$$
$$(x+1)e^{x+1} > 0 \iff x > -1$$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ．(増減だけでなくグラフの凹凸も調べること．)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	-2	↘	$-e$	↗
		変曲点		極小	

e) $f(x)$ が極大・極小となる点，および変曲点を求めよ.

極大となる点 なし

極小となる点 $x = 0$

変曲点 $(-1, -2)$

f) $e \fallingdotseq 2.718$，$e^{-1} \fallingdotseq 0.368$，$e^{-2} \fallingdotseq 0.135$ であるとして，$f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ の値を概算せよ.

$f(-3) = -4e^{-2} \fallingdotseq -0.541$

$f(-2) = -3e^{-1} \fallingdotseq -1.104$

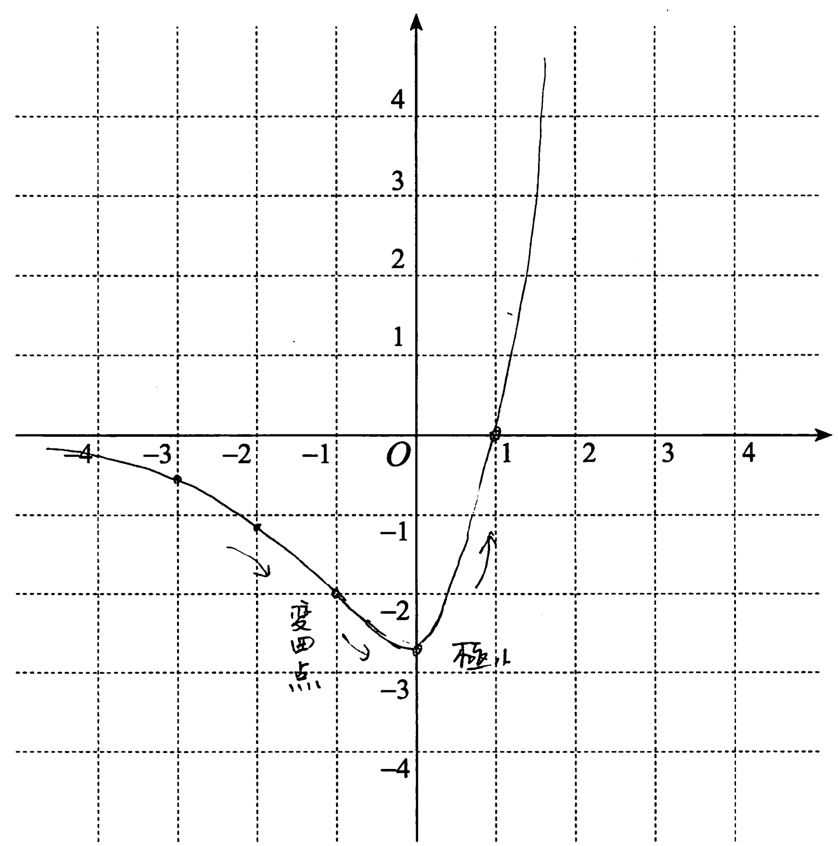
$f(-1) = -2$

$f(0) = -e \fallingdotseq -2.718$

$f(1) = 0$

$f(2) = e^3 \fallingdotseq 20.\ldots$

g) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ であることが知られている．これと，ここまでの結果を用いて，$f(x)$ のグラフを描け.



担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)

中央大学