入学年度	学部	学科		組		番号			検	フリガナ
										氏名

1 X は，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ という値をとる確率が，それぞれ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ であるような確率変数であるとする．このとき，期待値 $E(X)$ は $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ で定義されるのであった．いま，a, b を定数とするとき，$aX + b$ とは下のような確率分布をもつ確率変数であると定義される．

$aX+b$	ax_1+b	ax_2+b	$\cdots$	ax_k+b	$\cdots$	ax_n+b	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n	1

a) $aX + b$ の期待値 $E(aX + b)$ を求めよ．

$$E(aX+b) = \sum_{k=1}^{n}(ax_k+b)p_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} ax_k p_k + \sum_{k=1}^{n} b p_k$$
$$= a\underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}_{E(X)} + b\underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k}_{1} = aE(X)+b$$

b) 確率変数 X の分散 $V(X)$ について $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ が成り立つことと，a) の結果を用い，$V(aX + b)$ を求めよ．［ヒント：$E((aX + b)^2) = E(a^2X^2 + 2abX + b^2)$ であることに注意せよ．］

$$V(aX+b) = E((aX+b)^2) - E(aX+b)^2$$
$$= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X)+b)^2 \quad (\text{a) より})$$
$$= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - (a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2)$$
$$= a^2(E(X^2) - E(X)^2)$$
$$= a^2V(X)$$

2 a) 1 個のさいころを投げるとき，出る目の数 X の平均と分散を求めよ．

$$E(X) = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + \cdots + 6\times\frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{6}(1+2+\cdots+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \quad (= 3.5)$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \frac{1}{6}(1^2+2^2+\cdots+6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \quad (\fallingdotseq 2.917)$$

b) 1 個のさいころを投げて，出た目の数だけ 100 円硬貨がもらえるゲームで，300 円払ってゲームをするとき，利益 Y の平均と標準偏差を求めよ．

Y と X の間には $Y = 100X - 300$ という関係がある

$$E(Y) = E(100X-300) = 100E(X) - 300$$
$$= 100\times\frac{7}{2} - 300 = 50 \text{ (円)}$$
$$\sigma(Y) = \sigma(100X-300) = 100\sigma(X)$$
$$= 100\sqrt{V(X)} = 100\sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{50\sqrt{105}}{3} \quad (\fallingdotseq 170.8)$$

3 1枚の硬貨を続けて5回投げるとき，表の出る回数を X とする.

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ.

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

b) 確率変数 X の期待値と標準偏差を求めよ.

$$E(X) = 0\times\frac{1}{32} + 1\times\frac{5}{32} + 2\times\frac{10}{32} + 3\times\frac{10}{32} + 4\times\frac{5}{32} + 5\times\frac{1}{32}$$
$$= \frac{1}{32}(5+20+30+20+5) = \frac{80}{32} = \frac{5}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \frac{1}{32}(0\times1 + 1\times5 + 4\times10 + 9\times10 + 16\times5 + 25\times1) - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{32}\times240 - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

（二項分布 $B(n,p)$ の期待値，分散の公式を用いるとすぐに計算できるようになる）

c) 数直線上に針を立て，硬貨を投げて，表が出たら針を正の方向に1だけ動かし，裏が出たら針を負の方向に1だけ動かす．最初に針を原点に立てておき，硬貨を5回投げた後の針の座標を Y とする．Y を X を用いて表し，Y の期待値，分散，標準偏差を求めよ.

5回投げた後，表の出た回数だけ正の方向に進み，
裏の出た回数だけ負の方向に進む

表の出た回数：X，裏の出た回数：$5-X$

$$\therefore\ Y = X - (5-X)$$
$$= 2X - 5$$

$$E(Y) = E(2X-5) = 2E(X) - 5 = 0$$
$$V(Y) = V(2X-5) = 4V(X) = 5$$
$$\sigma(Y) = \sigma(2X-5) = 2\sigma(X) = \sqrt{5}$$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)