入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1　1枚の硬貨を続けて5回投げるとき，表の出る回数を X とする．

a)　確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

b)　確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を定義にしたがって求めよ．

$$E(X) = 0\times\frac{1}{32} + 1\times\frac{5}{32} + 2\times\frac{10}{32} + 3\times\frac{10}{32} + 4\times\frac{5}{32} + 5\times\frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{32}(5+20+30+20+5) = \frac{80}{32} = \frac{5}{2}$$

$$V(X) = \left(0-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{32} + \left(1-\frac{5}{2}\right)^5\times\frac{5}{32} + \left(2-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{10}{32} + \left(3-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{10}{32}$$

$$+ \left(4-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{5}{32} + \left(5-\frac{5}{2}\right)^5\times\frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{128}(25+45+10+10+45+25) = \frac{160}{128} = \frac{5}{4}$$

c)　確率変数 X^2 の確率分布を求めよ．

X^2	0	1	4	9	16	25	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

d)　確率変数 X^2 の期待値 $E(X^2)$ および $E(X^2)-E(X)^2$ を計算し，$E(X^2)-E(X)^2 = V(X)$ であることを確かめよ．

$$E(X^2) = 0\times\frac{1}{32} + 1\times\frac{5}{32} + 4\times\frac{10}{32} + 9\times\frac{10}{32} + 16\times\frac{5}{32} + 25\times\frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{32}(5+40+90+80+25) = \frac{240}{32} = \frac{15}{2}$$

$$E(X^2) - E(X)^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30-25}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

2　2個のサイコロを投げるとき，出た目の数のうち大きくない方を Y とする．

a)　確率変数 Y の確率分布を求めよ．

Y	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

b)　確率変数 Y の期待値と標準偏差を求めよ．

$$E(Y) = 1\times\frac{11}{36} + 2\times\frac{9}{36} + 3\times\frac{7}{36} + 4\times\frac{5}{36} + 5\times\frac{3}{36} + 6\times\frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{36}(11+18+21+20+15+6) = \frac{91}{36}$$

$$E(Y^2) = 1\times\frac{11}{36} + 4\times\frac{9}{36} + 9\times\frac{7}{36} + 16\times\frac{5}{36} + 25\times\frac{3}{36} + 36\times\frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{36}(11+36+63+80+75+36) = \frac{301}{36}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = \frac{2555}{36^2}$$

$$\sigma(Y) = \frac{\sqrt{2555}}{36}$$

3 1から6までの番号をつけた6枚のカードがある．この中から同時に2枚のカードを引くとき，引いたカードの番号の大きい方を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

b) 確率変数 X の期待値と標準偏差を求めよ．

$$E(X) = \frac{1}{15}(2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5)$$

$$= \frac{70}{15} = \frac{14}{3} = 4.67$$

$$E(X^2) = \frac{1}{15}(4\times1+9\times2+16\times3+25\times4+36\times5)$$

$$= \frac{350}{15} = \frac{70}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{70}{3} - \left(\frac{14}{3}\right)^2$$

$$= \frac{14}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3} = 1.247..$$

4 次の表は，あるクラスの英語のテストの成績である．

点数	2	3	4	5	6	7	8	9	10	計
人数	1	0	2	9	12	6	5	3	2	40

このクラスから1人の生徒を選び，その生徒の点数を X とする．

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	計
P	$\frac{1}{40}$	$\frac{0}{40}$	$\frac{2}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{12}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{2}{40}$	1

b) 確率変数 X の平均 $\mu = E(X)$ と標準偏差 $\sigma = \sqrt{V(X)}$ を求めよ．

$$E(X) = \frac{1}{40}(2\times1+3\times0+4\times2+5\times9+6\times12+7\times6+8\times5+9\times3+10\times2)$$

$$= \frac{256}{40} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$E(X^2) = \frac{1}{40}(4\times1+9\times0+16\times2+25\times9+36\times12+49\times6+64\times5+81\times3+100\times2)$$

$$= \frac{1750}{40} = \frac{175}{4}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{175}{4} - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = \frac{279}{100} = 2.79$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1.67..$$

c) $P(|X-\mu| \leqq \sigma)$，$P(|X-\mu| \leqq 2\sigma)$，$P(|X-\mu| \leqq 3\sigma)$ を求めよ．

- $|X-\mu| \leqq \sigma \iff \mu-\sigma \leqq X \leqq \mu+\sigma$

  $\iff 4.73 \leqq X \leqq 8.07$

  $\iff X = 5, 6, 7, 8$

  $\therefore P(|X-\mu| \leqq \sigma) = P(X=5,6,7,8) = \frac{1}{40}(9+12+6+5) = \frac{32}{40} = 0.8$

- $|X-\mu| \leqq 2\sigma \iff 3.06 \leqq X \leqq 9.74 \iff X = 4,5,6,7,8,9$

  $\therefore P(|X-\mu| \leqq 2\sigma) = \frac{1}{40}(40-1-2) = \frac{37}{40} = 0.925$

- $|X-\mu| \leqq 3\sigma \iff 1.39 \leqq X \leqq 11.41$

  $\therefore P(|X-\mu| \leqq 3\sigma) = 1$