

入学年度	学部	学科	組	番号	校	フリガナ
						氏名

1] 次の二項分布の期待値, 分散と標準偏差を求めよ.

a) $B(12, \frac{1}{4})$

$$\mu = 12 \times \frac{1}{4} = 3$$

$$\sigma^2 = 12 \times \frac{1}{4} = 12 \times \frac{1}{4} \times (1 - \frac{1}{4})$$

$$= \frac{9}{4}$$

$$\sigma = \frac{3}{2}$$

b) $B(9, \frac{1}{2})$

$$\mu = 9 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\sigma^2 = 9 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2})$$

$$= \frac{9}{4}$$

$$\sigma = \frac{3}{2}$$

c) $B(8, \frac{2}{3})$

$$\mu = 8 \times \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\sigma^2 = 8 \times \frac{2}{3} \times (1 - \frac{2}{3})$$

$$= \frac{16}{9}$$

$$\sigma = \frac{4}{3}$$

2] 次の確率変数 X は二項分布に従う. X を $B(n, p)$ の形に表し, X の期待値, 標準偏差を求めよ.

a) 1枚の硬貨を10回投げるとき, 表が出る回数 X .

$$X \sim B(10, \frac{1}{2})$$

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

b) 不良率3%の製品の山から50個取り出したときの不良品の個数 X .

$$X \sim B(50, 0.03)$$

$$E(X) = 50 \times 0.03 = 1.5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{50 \times 0.03 \times 0.97} \approx 1.206$$

3] 確率変数 X が二項分布 $B(100, 0.2)$ に従うとき, 次の各場合に確率変数 Y の期待値と分散を求めよ.

a) $Y = 3X - 2$

$$X \sim B(100, 0.2) \text{ より } E(X) = 20, V(X) = 100 \times 0.2 \times 0.8 = 16$$

$$E(Y) = 3E(X) - 2 = 58$$

$$V(Y) = 3^2 E(X) = 144$$

b) $Y = -X$

$$E(Y) = -E(X) = -20$$

$$V(Y) = (-1)^2 V(X) = 16$$

c) $Y = \frac{X - 20}{4}$

$$E(Y) = \frac{E(X) - 20}{4} = 0$$

$$V(Y) = (\frac{1}{4})^2 V(X) = \frac{1}{16} \times 16 = 1$$

4] a, b は定数で, $a > 0$ とする. 確率変数 X の期待値が5, 分散が100であるとき, 1次式 $Y = aX + b$ で定められる確率変数 Y の期待値が0, 分散が1となるように, a, b の値を定めよ.

$$E(X) = 5, V(X) = 100$$

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b = 5a + b = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$V(Y) = V(aX + b) = a^2 V(X) = 100a^2 = 1 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{②より } a > 0 \text{ より } a = \frac{1}{10}$$

$$\text{①より } b = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$Y = \frac{X - 5}{10}$$

5 数直線上に針を立て、硬貨を投げて、表が出たら針を正の方向に1だけ動かし、裏が出たら針を負の方向に1だけ動かす。最初に針を原点に立てておき、硬貨を6回投げた後の針の座標を X とする。また、第 k 回目に表が出ると1、裏が出ると -1 となる確率変数を X_k とすると、 X_1, \dots, X_6 は互いに独立であつて、 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_6$ と表せる。次の問に答えよ。

a) 第 k 回目に表が出ると1、裏が出ると0となる確率変数を Y_k とする。 X_k を Y_k で表せ。

$$X_k = aY_k + b \quad \text{とし、} \begin{cases} Y_k=1 \text{ のとき、} & X_k=1 \\ Y_k=0 \text{ のとき、} & X_k=-1 \end{cases} \quad \text{と対応するように}$$

$$a, b \text{ を定めると } X_k = 2Y_k - 1$$

b) $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_6$ は二項分布に従う。その分布を $B(n, p)$ の形で表せ。

$$Y \sim B(6, \frac{1}{2})$$

c) X を Y を用いて表せ。

$$X_k = 2Y_k - 1$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_6$$

$$= (2Y_1 - 1) + (2Y_2 - 1) + \dots + (2Y_6 - 1)$$

$$= 2(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_6) - 6$$

$$\therefore X = 2Y - 6$$

d) X の期待値、分散、標準偏差を求めよ。

$$E(X) = 2E(Y) - 6 = 2 \times 6 \times \frac{1}{2} - 6 = 0$$

$$V(X) = V(2Y - 6) = 2^2 V(Y) = 2^2 \times 6 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = 6$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{6}$$

6 2個のサイコロを同時に投げるとき、同じ目が出るならば20点を得、異なる目が出るならば2点を失うという。これを15回繰り返したとき、得点の合計の期待値と標準偏差を求めよ。

2個のさいころを同時に15回投げるとき、同じ目が出る回数を Y 、得点の合計を X とする。

$$Y \sim B(15, \frac{1}{6})$$

$$X = 20Y + (-2)(15 - Y) = 22Y - 30$$

$$E(X) = 22E(Y) - 30 = 22 \times 15 \times \frac{1}{6} - 30 = 55 - 30 = 25$$

$$\sigma(X) = 22\sigma(Y) = 22 \times \sqrt{15 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = 22 \times \frac{5}{6} \sqrt{3} = \frac{55\sqrt{3}}{3}$$