入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1 さいころを２回続けて投げるとき，最初に出た目の数を X_1，２回目に出た目の数を X_2 する．

a) 確率変数 X_1 の期待値 $E(X_1)$ と分散 $V(X_1)$ を求めよ．

9 2 a) と同様にして．$E(X_1) = \frac{7}{2}$

$V(X_1) = \frac{35}{12}$

b) 確率変数 Y を X_1 と X_2 の和とする．すなわち，$Y = X_1 + X_2$ とする．Y の確率分布を求めよ．

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

c) 確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ を求め，$E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$ であることを確かめよ

$$E(Y) = \frac{1}{36}(2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12)$$

$$= \frac{252}{36} = 7$$

$E(X_1) + E(X_2) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}$ なので

確かに $E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$ が成り立っている．

d) 確率変数 Y の分散 $V(Y)$ を定義にしたがって求め，$V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$ であることを確かめよ．

$$V(Y) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2 p_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - 7)^2 p_k$$

$$= \frac{1}{36}(25\times1 + 16\times2 + 9\times3 + 4\times4 + 1\times5$$
$$+ 1\times5 + 4\times4 + 9\times3 + 16\times2 + 25\times1)$$

$$= \frac{35}{6}$$

$V(X_1) + V(X_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$ なので 確かに $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$

e) 次に，確率変数 Z を X_1 と X_2 の積とする．すなわち，$Z = X_1X_2$ とする．Z の確率分布を求めよ．

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Z	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

f) 確率変数 Z の期待値 $E(Z)$ を求め，$E(Z) = E(X_1)E(X_2)$ であることを確かめよ．

$$E(Z) = \frac{1}{36}(1+4+6+12+10+24+16+9+20+48+30+16+36$$
$$+40+48+25+60+36)$$

$$= \frac{441}{36} = \frac{49}{4}$$

$E(X_1)E(X_2) = \frac{7}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{49}{4}$ だから確かに $E(Y) = E(X_1)E(X_2)$

【裏に続く】

2 独立な確率変数 X と Y について，$E(XY) = E(X)E(Y)$ が成り立つ．この性質を既知として，独立な確率変数 X と Y について，$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ が成り立つことを証明せよ．［分散と期待値の関係式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用いるとよい．］

$$
\begin{aligned}
V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 \\
&= E(X^2+2XY+Y^2) - (E(X)+E(Y))^2 \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2) \\
&= \underbrace{E(X^2) - E(X)^2}_{V(X)} + 2(\underbrace{E(XY) - E(X)E(Y)}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \because\ X,Y\text{独立}}) + \underbrace{E(Y^2) - E(Y)^2}_{V(Y)} \\
&= V(X) + V(Y)
\end{aligned}
$$

3 確率変数 X の期待値が -3 で分散が 5，確率変数 Y の期待値が 2 で分散が 4 であり，X と Y が互いに独立であるとする．このとき，確率変数 $Z = X + Y$ の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

$E(X) = -3$, $V(X) = 5$

$E(Y) = 2$, $V(Y) = 4$

$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = -1$

$V(Z) = V(X+Y) \underset{\substack{\uparrow \\ X,Y\text{独立}}}{=} V(X) + V(Y) = 9$

4 a) さいころを 1 回投げるとき，1 の目が出ると $X = 1$，それ以外の目が出ると $X = 0$ とする．確率変数 X の期待値と分散を求めよ．

X	0	1	計
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$E(X^2) = 0^2 \times \frac{5}{6} + 1^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\
&= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}
\end{aligned}
$$

b) 1 個のサイコロを続けて 5 回投げるとき，1 の目の出る回数を Y とする．このとき，第 k 回目に 1 の目が出ると 1，それ以外の目が出ると 0 となる確率変数を X_k とすると，各 X_k は a) と同じ分布にしたがい，$X_1, \ldots, X_5$ は互いに独立であって，$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ と表せる．これを用いて，確率変数 Y の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \\
&= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) \\
&= \frac{1}{6} \times 5 = \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(Y) &= V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \\
&= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) + V(X_5) \\
&= \frac{5}{36} \times 5 = \frac{25}{36}
\end{aligned}
$$

$\sigma(Y) = \frac{5}{6}$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)