復習問題

- 極限の計算法について復習せよ．
- 平均変化率，瞬間変化率（=微分係数），導関数の定義をそれぞれ述べよ．
- 関数の定義域・値域と，その逆関数の定義域・値域の関係を述べよ．関数のグラフとその逆関数のグラフの間にはどのような関係があるか．
- 積・商の微分公式，合成関数の微分公式を書け．それらの導き方を理解し，使い方について復習せよ．
- 数 e とはどのような数であるか．指数関数 e^x とその逆関数である対数関数 $\log x$ の導関数は何か．
- 関数の増減，極大・極小，凹凸，変曲点を増減表を書いて調べ，それを利用して関数のグラフを描く方法を復習せよ．

$\boxed{1}$ 極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(2+h)^2}-\frac{1}{4}\right)$ を求めよ．

$\boxed{2}$ $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ のとする．

a) x が 1 から 2 まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求めよ．

b) $x=1$ における $f(x)$ の瞬間変化率（＝微分係数）を定義に従って求めよ．

c) $y=f(x)$ のグラフの $(1,-1)$ における接線の方程式を求めよ．

d) $y=f(x)$ のグラフと，$(1,-1)$ における接線を描け．

$\boxed{3}$ $f(x)=-\sqrt{2x-1}$ として前問と同じ問いに答よ．

$\boxed{4}$ グラフを利用して，次の不等式を解け．

a) $\dfrac{2x-1}{x-1}<x+1$　　b) $\sqrt{-4x+8}\geqq x+1$

$\boxed{5}$ a を定数とし，$f(x)=\dfrac{1}{1-x},\ g(x)=\dfrac{x+a}{x}$ とする．

a) $(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ を求めよ．

b) $g(x)$ が $f(x)$ の逆関数になるように，定数 a の値を定めよ．

$\boxed{6}$ 次のおのおのの関数について，その定義域と値域を求めよ．また，それぞれの逆関数を求め，逆関数の定義域と値域も求めよ．

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$　　b) $f(x)=-\sqrt{2-x}$

$\boxed{7}$ 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x)=(2x^2+5x-6)^3$　　b) $f(x)=x(x-1)^4$　　c) $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-3)^2}$

d) $f(x)=\dfrac{2x-5}{3x^2+1}$　　e) $f(x)=(x+3)\sqrt{2-x}$　　f) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x+4}}$

g) $f(x)=xe^{-2x}$　　h) $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$　　i) $f(x)=\log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

【裏につづく】

$\boxed{8}$ 次の関数の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，そのグラフをかけ．

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 1$

b) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$

c) $f(x) = e^{-x^2/2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \log x$

$\boxed{9}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

a) $x + \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$

b) $(2x-1)e^{-2x}$ $(0 \leqq x \leqq 3)$

$\boxed{10}$ 長さ $2a$ の線分 AB を直径とする半円に内接する台形 ABCD の面積 S の最大値を求めよ．［ヒント：台形の高さを h とおき，上底の長さを h で表せ．］

$\boxed{11}$ $f(x) = \log(1+x) - x$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

b) $f(x)$ の定義域内での最大値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

c) $x > -1$ のとき，不等式 $\log(1+x) \geqq x$ が成り立つことを証明せよ．

$\boxed{12}$ ある工場の生産関数が $Q(L)$ で与えられているとする．ただし，L は労働者の人数を表す．いま，労働者 1 人当たりの生産量 $\dfrac{Q(L)}{L}$ を最大にするような L を L^* とするとき，$Q'(L^*) = \dfrac{Q(L^*)}{L^*}$ であることを示せ．