

復習問題 略解

$$\boxed{1} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-h^2 - 4h}{4(2+h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-4}{4(2+h)^2} = \frac{-4}{4 \times 2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{2} \quad \text{a) } \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2}{3} \quad \text{b) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2 \quad \text{c) } y = 2x - 3 \quad \text{d) 別紙参照}$$

$$\boxed{3} \quad \text{a) } \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -\sqrt{3} + 1 \quad \text{b) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1 \quad \text{c) } y = -x \quad \text{d) 別紙参照}$$

$$\boxed{4} \quad \text{a) 別紙グラフより, } 0 < x < 1, 2 < x \quad \text{b) 別紙グラフより, } x \leq 1$$

$$\boxed{5} \quad \text{a) } (g \circ f)(x) = 1 + a - ax, (f \circ g)(x) = -\frac{x}{a}.$$

b) $1 + a - ax = x$ がすべての x になつて成り立たなければ行けないので, $a = -1$. (このとき $(f \circ g)(x) = x$ も成り立っていることに注意.)

$$\boxed{6} \quad \text{a) 定義域 } x \neq -2, \text{ 値域 } y \neq 2; \text{ 逆関数 } f^{-1}(x) = -\frac{2x+1}{x-2}, \text{ 逆関数の定義域 } x \neq 2, \text{ 値域 } y \neq -2.$$

b) 定義域 $x \leq 2$, 値域 $y \leq 0$; 逆関数 $f^{-1}(x) = 2 - x^2$, 逆関数の定義域 $x \leq 0$, 値域 $y \leq 2$.

$\boxed{7}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

$$\text{a) } f'(x) = 3(4x+5)(2x^2+5x-6)^2$$

$$\text{b) } f'(x) = (x-1)^4 + 4x(x-1)^3$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-3)^3}$$

$$\text{d) } f'(x) = \frac{-2(3x^2-15x-1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$\text{e) } f'(x) = \frac{1-3x}{2\sqrt{2-x}}$$

$$\text{f) } f'(x) = -\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{(x+4)^4}}$$

$$\text{g) } f'(x) = (1-2x)e^{-2x}$$

$$\text{h) } f'(x) = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$$

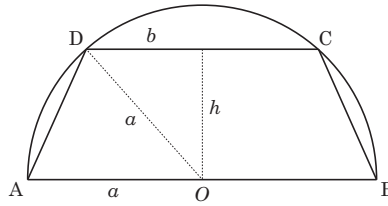
$$\text{i) } f'(x) = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$\boxed{8}$ 別紙グラフ参照

$\boxed{9}$ a) 最大値 $\sqrt{2}$ ($x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき), 最小値 -1 ($x = -1$ のとき).

b) 最大値 $e^{-2} = 0.135335\dots$ ($x = 1$ のとき), 最小値 -1 ($x = 0$ のとき).

10 台形の高さを h とし、上底の長さ（辺 CD の長さ）を $2b$ とおくと、図のように $a^2 = b^2 + h^2$ が成り立つ。



したがって、 $b = \sqrt{a^2 - h^2}$ となる。このとき、 $S = \frac{2a + 2b}{2}h$ であるから、 $S = h(a + \sqrt{a^2 - h^2})$ 。

$$\frac{dS}{dh} = \frac{a\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - 2h^2}{\sqrt{a^2 - h^2}}$$

$\frac{dS}{dh} = 0$ となるのは $a\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - 2h^2 = 0$ のときであるが、 $a\sqrt{a^2 - h^2} = -a^2 + 2h^2$ の両辺を 2 乗して整理することにより、 $4h^4 = 3a^2h^2$ を得る。 $h > 0$ であることに注意して $\frac{dS}{dh} = 0$ となるのは $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ のとき。 $0 < h < a$ の範囲で S の増減表を書けば（省略）、 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ のとき S が最大になることがわかり、 S の最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ 。

11 a) 真数条件より、 $x > -1$ 。

b) $f'(x) = \frac{-x}{1+x}$ より、増減表を書けば（省略）、 $f(x)$ は $x = 0$ のとき最大値 0 をとることがわかる。

c) b) より、定義域 $x > -1$ で $f(x) \geq 0$ 。これは $\log(1+x) \geq x$ を意味する。

12 $\frac{Q(L)}{L}$ を最大にするような L では、 $\left(\frac{Q(L)}{L}\right)' = 0$ が成り立つ。一方、商の微分法により

$$\left(\frac{Q(L)}{L}\right)' = \frac{Q'(L)L - Q(L)}{L^2} = \frac{Q'(L) - \frac{Q(L)}{L}}{L}$$

が成り立つ。したがって、

$$Q'(L^*) - \frac{Q(L^*)}{L^*} = 0$$