以下の問題は，公式 $\left(x^{a}\right)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを系統的に証明することである．したがって，すでに証明された場合以外，この公式を用いて答えてはならない．

$\boxed{1}$ 【n が自然数の場合】任意の自然数 n について $f_n(x) = x^n$ とおく．$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい．

(I) $n = 1$ のとき．$f_1(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1{}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} =$$

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると，$f_k{}'(x) = kx^{k-1}$．いま，$f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから，積の微分公式を用いて，

$$f_{k+1}{}'(x) = \left(f_1(x)f_k(x)\right)' =$$

［結論まできちんと述べよ.］

$\boxed{2}$ 【n が負の整数の場合】

a) 商の微分公式を用いて $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ.

b) $(x^{-n})'$ を ax^b の形に表せ.

入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
											氏 名	

$\boxed{3}$ 【$a = 1/n$ の場合】$f(x) = x^n$ とすると，関数 $\sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x)$ の逆関数である．すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である.

a) 逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ.

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'$ を ax^b の形に表せ.

$\boxed{4}$ 【a が有理数の場合】$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ であることを用い，合成関数の微分公式を用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ を ax^b の形に表せ.

$\boxed{5}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2+3}$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2-2x+3}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$

$f'(x) =$

d) $f(x) = (x+1)\sqrt{2-x}$

$f'(x) =$

e) $f(x) = \sqrt[4]{(x^2+x+1)^5}$

$f'(x) =$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

$f'(x) =$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)

a を正の数としたとき，指数関数 $f(x) = a^x$ の導関数を求めたい．そのために，まず，$f(x) = a^x$ の $x = 0$ における微分係数を求める．その定義式は

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \boxed{}$$

である．そこで実験として $a = 2$ と $a = 3$ のときに $\dfrac{a^h - 1}{h}$ の値の数値計算をしてみる．$\sqrt{}$ 機能のある電卓などを用いて，$2^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{1.414\cdots}$，$2^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \ldots$ などと計算して，下の表を作ると

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
$\dfrac{1}{2}$	$(1.41421356\ldots - 1) \times 2 = 0.82842712\ldots$	$(1.73205080\ldots - 1) \times 2 = 1.4641016\ldots$
$\dfrac{1}{4}$	$(1.18920711\ldots - 1) \times 4 =$	$(1.31607401\ldots - 1) \times 4 =$
$\dfrac{1}{8}$	$=$	$=$
$\dfrac{1}{16}$	$=$	$=$
$\dfrac{1}{32}$	$=$	$=$
$\dfrac{1}{64}$	$=$	$=$
$\dfrac{1}{128}$	$=$	$=$
$\dfrac{1}{256}$	$=$	$=$
$\dfrac{1}{512}$	$=$	$=$
$\dfrac{1}{1024}$	$=$	$=$
$\vdots$	$\downarrow$	$\downarrow$
0		

この表より $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} = \boxed{}$，$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} = \boxed{}$ と推測できる．