● 合成関数の微分公式（連鎖律）

2 つの微分可能な関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f\bigl(g(x)\bigr)$ の導関数を $y = f(u)$，$u = g(x)$ の導関数で表したい．いま，

$$x \text{ の増分 } \Delta x \text{ に対する } u \text{ の増分を } \Delta u,$$
$$u \text{ の増分 } \Delta u \text{ に対する } y \text{ の増分を } \Delta y$$

とする．すなわち，

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x),$$
$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

と定義する．ここで，求めたいのは $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の $\Delta x \to 0$ としたときの極限である．$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は少々無理矢理 Δu を間に挟むと，

$$(*) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

と書ける．この両辺の $\Delta x \to 0$ とした極限を考える．ここで $u = g(x)$ が微分可能な関数であることから，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ となるので，

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\boxed{}} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \end{aligned}$$

が成り立つ．これより，合成関数の微分公式の一つの形である次の式が得られる．

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{} \cdot \boxed{}$$

合成関数の微分公式を，$'$ を用いた記法で表すことを考えよう．合成関数 $f\bigl(g(x)\bigr)$ の導関数 $\Bigl(f\bigl(g(x)\bigr)\Bigr)'$ は

$$\Bigl(f\bigl(g(x)\bigr)\Bigr)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\bigl(g(x + \Delta x)\bigr) - f\bigl(g(x)\bigr)}{\Delta x}$$

で定義される．ここで，$u = g(x)$ としたとき，$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$ であったから，

$$g(x + \Delta x) = u + \Delta u$$

と書ける．したがって，$g(x + \Delta x)$，$g(x)$ をそれぞれ，$u + \Delta u$，u で置き換えて

$$f\bigl(g(x + \Delta x)\bigr) - f\bigl(g(x)\bigr) = \boxed{}$$

と書くことができる．そして，$(*)$ と同様に Δu を間に挟むことにより

入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
											氏 名	

$$\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big)-f\big(g(x)\big)}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\boxed{\qquad\qquad}}{\Delta x}$$

となる．この両辺において $\Delta x\to 0$ とすると，$\Delta u\to 0$ だから，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big)-f\big(g(x)\big)}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

ここで，

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}=\boxed{\qquad},\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\boxed{\qquad}$$

だから，

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)'=\boxed{\qquad}\cdot\boxed{\qquad}$$

$f'(u)$ を x で表すと $f'(u)=f'(g(x))$ と書き直せるので，次の合成関数の微分公式が得られる．

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)'=\boxed{\qquad\qquad}$$

● 逆関数の微分公式

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の微分公式を導きたい．関数 $f(x)$ の逆関数とは，$g\big(f(x)\big)=f\big(g(x)\big)=x$ をみたす関数 $g(x)$ に他ならない．そこで，$f(g(x))=x$ の両辺を合成関数の微分法を用いて微分すると，

$$\text{左辺}=\boxed{\qquad\qquad},\qquad \text{右辺}=(x)'=1$$

となるから，

$$\boxed{\qquad\qquad}=1$$

これを $g'(x)$ について解くと，

$$g'(x)=\frac{1}{\boxed{\qquad}}$$

$g(x)$ を $f^{-1}(x)$，$g'(x)$ を $\big(f^{-1}(x)\big)'$ と書き直すことにより，逆関数の導関数の公式が得られる．

$$\big(f^{-1}(x)\big)'=\frac{1}{\boxed{\qquad}}$$

【裏に続く】

$\boxed{1}$ $\Bigl(f\bigl(g(h(x))\bigr)\Bigr)'$ を求めよ.

$\boxed{2}$ $\bigl(g(x)^2\bigr)'$ を求めよ.

$\boxed{3}$ $f(x) = x^2$ としたとき，$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である．逆関数の微分公式を用いて $\bigl(\sqrt{x}\bigr)'$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 前問と同様にして $\bigl(\sqrt[3]{x}\bigr)'$ を求めよ.

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)

$\boxed{5}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (1 - 2x^2)^3$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$f'(x) =$

e) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$f'(x) =$

f) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

$f'(x) =$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$

$f'(x) =$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f'(x) =$