

● 積の微分公式

2つの関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の積として表される関数 $y = uv$ の導関数を求めたい。 x, y, u, v の増分をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ で表す。

いま、 x を $x + \Delta x$ に変化させたとき、 Δy を Δu と Δv を用いて表すことを考える。

x が $x + \Delta x$ に変化したとき

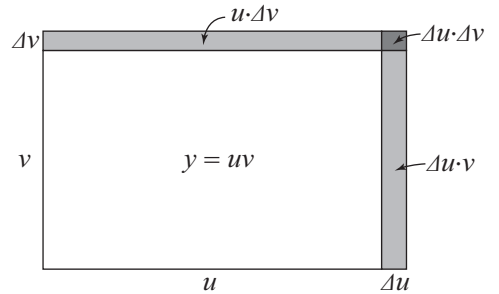
$$u \longrightarrow u + \Delta u, \quad v \longrightarrow v + \Delta v$$

と変化するので、

$$y = uv \longrightarrow (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

と変化する。したがって、 y の増分は

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$



と表せる。これを展開整理すると、

$$\Delta y = \Delta u \cdot \boxed{} + \boxed{} \cdot \Delta v + \boxed{}$$

と表される。この式の両辺を Δx で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{} \cdot v + u \cdot \boxed{} + \boxed{}$$

この式で $\Delta x \rightarrow 0$ として $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ を求めたい。まず、導関数の定義より、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

である。また、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta v \rightarrow 0$ となるので、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = \frac{du}{dx} \cdot 0 = 0.$$

が成り立つ。したがって、

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{} \cdot \boxed{}$$

この式を別の記号法 $\frac{dy}{dx} = (f(x)g(x))'$, $\frac{du}{dx} = f'(x)$, $\frac{dv}{dx} = g'(x)$ を用いて書き直すと、次の積の微分公式が得られる。

$$(f(x)g(x))' =$$

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
						氏名	

● 商の微分公式

次に、2つの関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の商として表される関数 $y = \frac{u}{v}$ の導関数を求めたい。前と同様に、 x, y, u, v の増分をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ で表し、 x を $x + \Delta x$ に変化させたとき、 Δy を Δu と Δv を用いて表すことを考える。

前の場合と同様に、 x が $x + \Delta x$ に変化したとき、 $u \rightarrow u + \Delta u$ 、 $v \rightarrow v + \Delta v$ と変化するので、

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

と変化する。したがって、 y の増分は

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

と表せる。これを通分し、整理すると、

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot \boxed{} - \boxed{} \cdot \Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

と表される。この式の両辺を Δx で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\boxed{}}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\boxed{}}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v}$$

と表される。この式で $\Delta x \rightarrow 0$ として $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ を求めたい。まず、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

であり、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta v \rightarrow 0$ となるので、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)v = v^2$ が成り立つ。したがって、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boxed{} \cdot \boxed{} - \boxed{} \cdot \boxed{}}{v^2}$$

この式を別の記号法 $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$ 、 $\frac{du}{dx} = f'(x)$ 、 $\frac{dv}{dx} = g'(x)$ を用いて書き直すと、次の商の微分公式が得られる。

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' =$$

1] $f(x)g(x)h(x) = (f(x)g(x))h(x)$ であることと積の微分公式を用いて 3 つの関数の積の導関数 $(f(x)g(x)h(x))'$ を求めよ.

2] 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1)$

$$f'(x) =$$

b) $f(x) = \frac{1}{3x - 2}$

$$f'(x) =$$

c) $f(x) = \frac{1}{6x^3}$

$$f'(x) =$$

d) $f(x) = \frac{x - 5}{x^2 + 5}$

$$f'(x) =$$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$$f'(x) =$$

f) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$

$$f'(x) =$$

3 積の微分公式を用い、関数 $f(x)g(x)^2$ の導関数 $(f(x)g(x)^2)'$ を求めよ.

4 底面の半径が r で、高さが h の直円錐がある. r, h が時間 t とともに変化するとき、この直円錐の体積 V の t に関する導関数 $\frac{dV}{dt}$ を $r, h, \frac{dr}{dt}, \frac{dh}{dt}$ を用いて表せ.