入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏 名

1 次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．さらにそれをもとに増減表を書け．

a) $f(x)=x^3-3x^2+3$

$f'(x)=3x^2-6x$
$=3x(x-2)$

$f'(x)>0 \iff 3x(x-2)>0$
$\iff x<0,\ x>2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	−1	↗
		極大		極小	

b) $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$

$f'(x)=3x^2+6x-9$
$=3(x-1)(x+3)$

$f'(x)>0 \iff 3(x-1)(x+3)>0$
$\iff x<-3,\ x>1$

x	$\cdots$	−3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

2 関数 $f(x)=x^3-3x^2+4$ の導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．さらにそれをもとに増減表を書き，$-2 \leqq x \leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ．また，それらを与える x の値を求めよ．

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$f'(x)>0 \iff 3x(x-2)>0$
$\iff x<0,\ x>2$

x	−2		0		2		3
$f'(x)$	+	+	0	−	0	+	+
$f(x)$	−16	↗	4	↘	0	↗	4

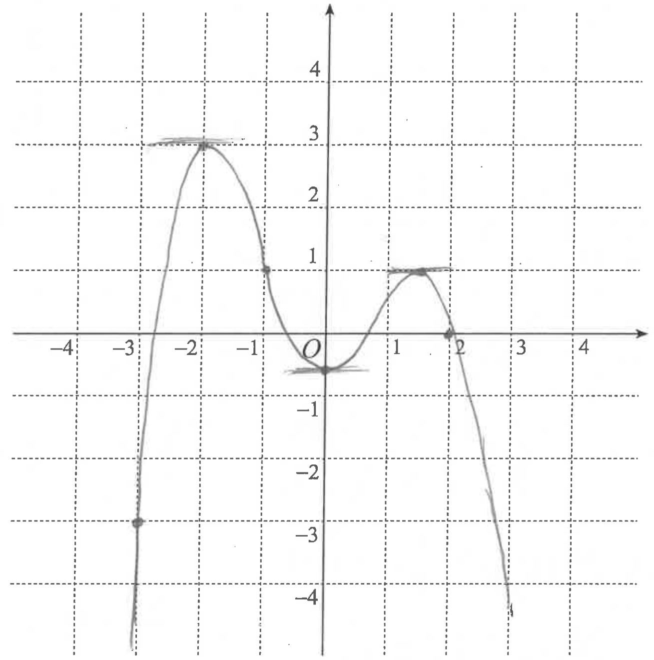
増減表より
最大値 4 $(x=0,3)$
最小値 −16 $(x=-2)$

3 下の表は，関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について，わかっていることをまとめてある．このとき，$y=f(x)$ のグラフを可能な限りなるべく忠実に描け．

a)

x	−3	−2	−1	0	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	−3	3	1	$-\frac{1}{2}$	1	0

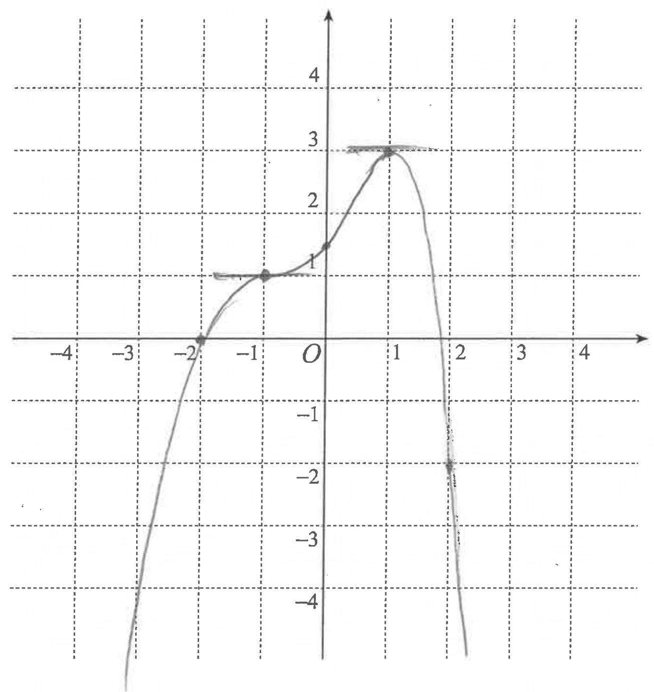
x	$\cdots$	−2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−



b)

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	0	1	$\frac{3}{2}$	3	−2

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+	0	−



4 次の関数 $f(x)$ の増減表を書き，グラフを描け.

a) $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+x^2+2x-\frac{5}{2}$

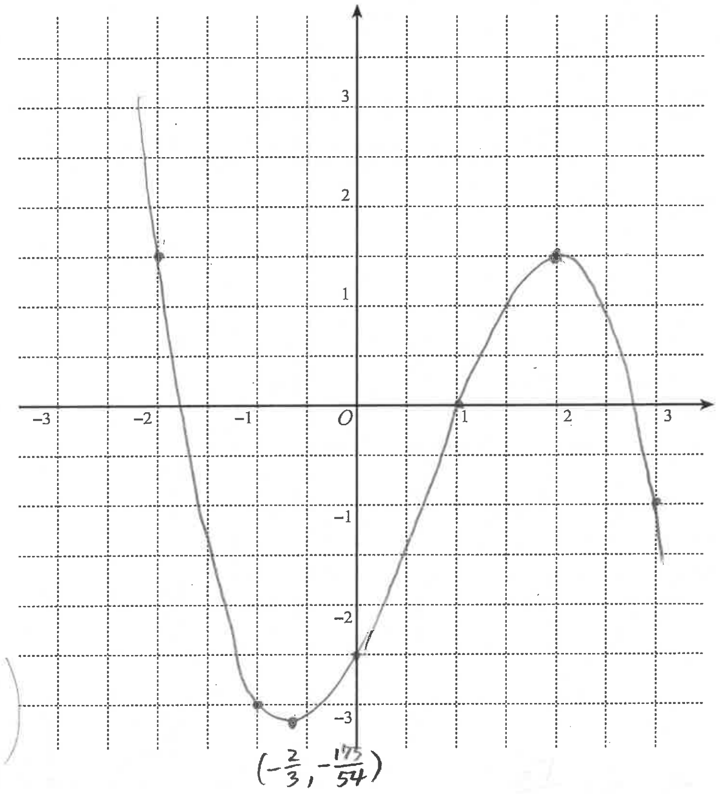
$$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+2x+2$$
$$=-\frac{1}{2}(3x^2-6x-4)$$
$$=-\frac{1}{2}(3x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3},\ 2$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}<x<2$

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{175}{54}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘

$\left(f(-2)=\frac{3}{2},\ f(-1)=-3,\ f(0)=-\frac{5}{2} \quad f(1)=0,\ f(2)=\frac{3}{2},\ f(3)=-1 \right)$



b) $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-1$

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x+1$$
$$=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{6}$$

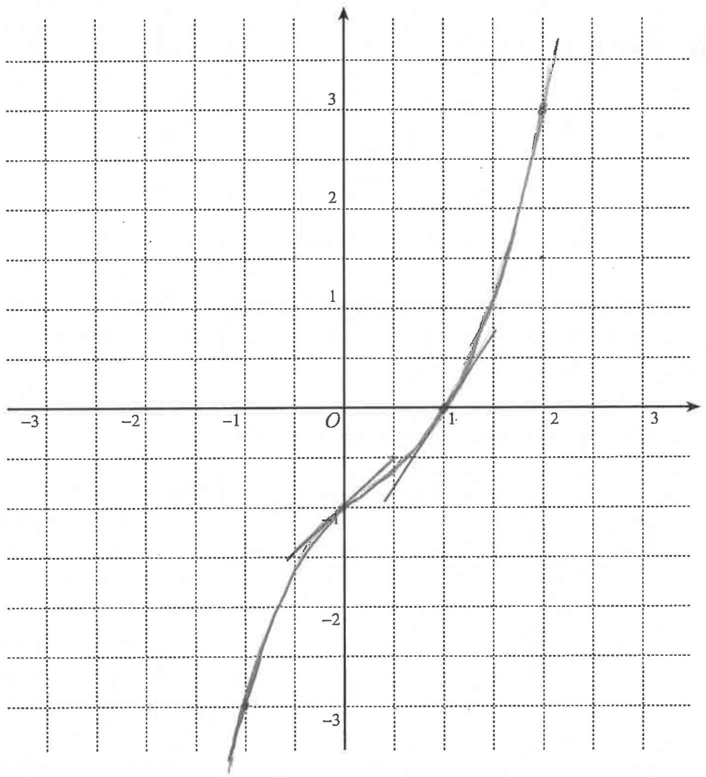
ゆえにすべての実数について

$f'(x)>0$

増減表は

x	$\cdots$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	↗

$\left(f(-1)=-3 \quad f(0)=-1,\ f'(0)=1 \quad f(1)=0,\ f'(1)=\frac{3}{2} \quad f(2)=3 \right)$



5 底面の半径が a，高さが h の直円柱がある.

a) この直円柱の表面積を求めよ.

表面積 $S=2\times$底面積$+$側面積 $=2\pi a^2+2\pi ah$

b) この直円柱の表面積が 8π であるとき，この直円柱の体積を a を用いて表せ.

$S=8\pi \Leftrightarrow 2\pi a^2+2\pi ah=8\pi \Leftrightarrow a^2+ah=4$

$\Leftrightarrow h=\frac{4-a^2}{a}$

$V=\pi a^2h=\pi a^2\times\frac{4-a^2}{a}=\pi a(4-a^2)$

c) 表面積が 8π である直円柱のうちで，体積が最大となるものの底面の半径と高さを求めよ.

$V=\pi(4a-a^3)$

$\frac{dV}{da}=\pi(4-3a^2)$

$\frac{dV}{da}=0 \Leftrightarrow a=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{dV}{da}>0 \Leftrightarrow a<\frac{2\sqrt{3}}{3}$

V の定義域 $a>0,\ h>0$ より $0<a<4$

a	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		4
$\frac{dV}{da}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
V	0	↗	最大	↘	0

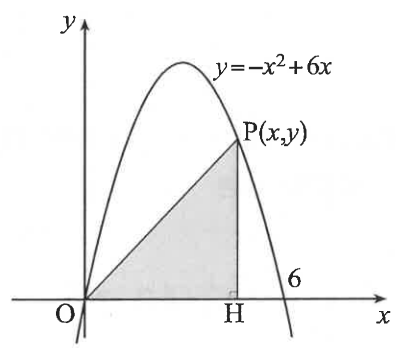
$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき $h=\frac{4-\frac{4}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$a=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ のとき V 最大

6 右図のように関数

$$y=-x^2+6x \quad (0\leqq x\leqq 6)$$

のグラフ上の点 $P(x,y)$ から x 軸に垂線 PH を下ろす.
このとき，△POH の面積を最大にする x の値と面積の最大値を求めよ.



△POH の面積 $S=\frac{1}{2}OH\times PH$
$$=\frac{1}{2}x\times(-x^2+6x)$$
$$=-\frac{1}{2}x^3+3x^2$$

x の動く範囲 $0<x<6$

$\frac{dS}{dx}=-\frac{3}{2}x^2+6x=-\frac{3}{2}x(x-4)$

$\frac{dS}{dx}=0 \Leftrightarrow x=0,\ 4$

$\frac{dS}{dx}>0 \Leftrightarrow 0<x<4$

x	0		4		6
$\frac{dS}{dx}$	0	$+$	0	$-$	$-$
S	0	↗	16	↘	0

$x=4$ のとき 面積は最大で
最大値 16.

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)