入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1 次の関数で，各々の場合について平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ．

a) $f(x) = x^3 - 1$，x が -1 から 2 まで変化するとき

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{7-(-2)}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

b) $f(x) = 3x^2 + 1$，x が a から $a+h$ まで変化するとき

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{(3(a+h)^2+1)-(3a^2+1)}{h} = \frac{6ah+3h^2}{h} = 6a+3h$$

2 関数 $f(x) = (2x+1)^2$ とするとき，次の微分係数を定義にしたがって求めよ．

a) $f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{(2(-1+h)+1)^2-(-2+1)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2h-1)^2-1}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4h^2-4h}{h} = \lim_{h\to 0}(4h-4) = -4$$

b) $f'(b) = \lim_{h\to 0}\frac{(2(b+h)+1)^2-(2b+1)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2b+2h+1)^2-(2b+1)^2}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{4b^2}+4h^2+\cancel{1}+8bh+\cancel{4b}+4h)-(\cancel{4b^2+4b+1})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4h^2+8bh+4h}{h} = \lim_{h\to 0}(4h+8b+4) = 8b+4$$

3 関数 $f(x) = x^3 - 1$ の $x = -1$ における微分係数 $f'(-1)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{((-1+h)^3-1)-((-1)^3-1)}{h} = \lim\frac{-1+3h-3h^2+h^3-1+2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3h-3h^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3-3h+h^2) = 3$$

4 静止している物体を自然に落下させたとき，落下しはじめてから t 秒後までの間に落ちる距離を s m とすれば，$s = f(t) = 4.9t^2$ であることが知られている．

a) 物体が，落下しはじめて 2 秒後から 4 秒後までの間に落ちる距離と，その間の平均の速さを求めよ．

落下距離：$f(4)-f(2) = 4.9(4^2-2^2) = 58.8$ (m)

平均の速さ $\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{58.8}{2} = 29.4$ (m/s)

b) 物体が，落下しはじめてから 3 秒後の瞬間の速さを極限を直接計算することによって求めよ．

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\frac{4.9(3+h)^2-4.9\cdot 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4.9(9+6h+h^2-9)}{h} = \lim_{h\to 0}4.9(6+h) = 29.4 \text{ (m/s)}$$

c) 物体が，落下しはじめて a 秒後から $a+h$ 秒後までの間に落ちる距離と，その間の平均の速さを求めよ．また，a 秒後の瞬間の速さを求めよ．

落下距離：$f(a+h)-f(a) = 4.9(a+h)^2-4.9a^2 = 4.9(2ah+h^2)$ (m)

平均の速さ：$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{4.9(2ah+h^2)}{h} = 4.9(2a+h)$ (m/s)

a秒後の瞬間の速さ $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}4.9(2a+h) = 9.8$ (m/s)

5 関数 $f(x) = x^4$ の導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^4}+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-\cancel{x^4}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3) = 4x^3$$

6 次の関数の導関数を求めよ.（まず，$f(x)$ を展開せよ.）

a) $f(x)=x^3-6x^2+3$

$f'(x)=3x^2-12x$

b) $f(x)=x(7x-3x^2)=7x^2-3x^3$

$f'(x)=14x-9x^2$

c) $f(x)=(2x-1)(3x+5)=6x^2+7x-5$

$f'(x)=12x^2+7$

d) $f(x)=(5x-1)^2=25x^2-10x+1$

$f'(x)=50x-10$

e) $f(x)=(4x^2-1)(3x+2)=12x^3+8x^2-3x-2$

$f'(x)=36x^3+16x-3$

f) $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$

$f'(x)=3x^2$

7 関数 $f(x)=x^2-x+1$ について，次の問いに答えよ.

a) x が a から b まで変化するときの，関数 $f(x)$ の平均変化率を求めよ.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2-b+1)-(a^2-a+1)}{b-a}=\frac{b^2-b-a^2+a}{b-a}$$

$$=\frac{b^2-a^2-(b-a)}{b-a}=\frac{(b-a)(b+a-1)}{b-a}=b+a-1$$

b) $x=c$ における微分係数 $f'(c)$ が，a) の平均変化率に一致するとき，$c=\frac{a+b}{2}$ であることを示せ.

$f'(x)=2x-1$ より $f'(c)=2c-1$

$2c-1=b+a-1 \Rightarrow c=\frac{a+b}{2}$

8 半径 r の球の表面積 S と体積 V をそれぞれ r の関数と考え，S と V を r で微分せよ.

$S=4\pi r^2 \quad \frac{dS}{dr}=8\pi r$

$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \frac{dV}{dr}=4\pi r^2$

9 次の関数 $f(x)$ について，$f'(x)$ を求め，$f'(x)>0$ となる x の範囲を求めよ.

a) $f(x)=x^3+3x^2+5$

$f'(x)=3x^2+6x$

$=3x(x+2)$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x(x+2)>0$

$\Leftrightarrow x<-2,\ x>0$

b) $f(x)=x^3-3x^2-9x+15$

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x^2-2x-3)$

$=3(x-3)(x+1)$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3(x-3)(x+1)>0$

$\Leftrightarrow x<-1,\ x>3$

【発展問題】

10 関数 $f(x)=\frac{1}{x}$ について，次の問いに答えよ.

a) x が a から $a+h$ まで変化するときの平均変化率を求めよ.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h}$$

$$=\frac{-\cancel{h}}{a(a+h)}\times\frac{1}{\cancel{h}}=\frac{-1}{a(a+h)}$$

b) $x=a$ における微分係数を定義に従って求めよ.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{a(a+h)}\right)=-\frac{1}{a^2}$$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)