2016 年度 後期

中央大学 文学部
担当 鍬田 政人

特別教養（１８）— 模擬試験

2017 年 1 月 11 日

時間 80 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく途中の計算や説明も書くこと．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

$\boxed{1}$ 次の連立 1 次方程式を Gauss の消去法（掃き出し法）を用いて解け.

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3w = 4 \\ 3x + 6y + 2z + 2w = 1 \\ 2x + 4y + 3z + 5w = 3 \\ 4x + 8y + 2z + 4w = 6 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ 行列 A とベクトル $\vec{x}$，$\vec{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \\ 2d \end{pmatrix}$$

と定義する．このとき行列 $(A \mid \vec{b})$ は行に関する基本変形によって下のように変形される.

$$(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2a \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2b \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2c \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2d \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & a-c \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -b-c \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d+b \end{array}\right)$$

a) 方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解をすべて求めよ.

b) 方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ が解を持つように定数 d を決め，そのときの解をすべて求めよ.

c) 行列 A は逆行列 A^{-1} を持つか？ 持つ場合は A^{-1} を求めよ.

$\boxed{3}$ a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列をもとめよ.

b) 次の連立一次方程式の解を a) の結果を用いて求めよ.

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ -x + 2y - 3z = 2 \\ -2x - y + z = 1 \end{cases}$$

【裏に続く】

$\boxed{4}$ 行列 P, Q を次のようにおく．PQ および QP を計算せよ．

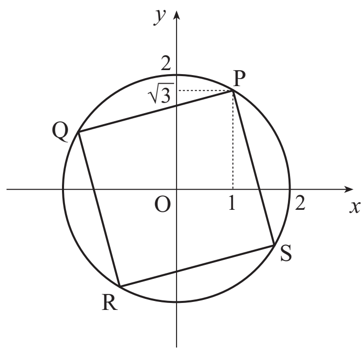
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$ 原点の回りの 90° 回転を表す行列を A，y 軸に関する対称移動を表す行列を B とする．

a) A，B を求めよ．

b) 右の図のように，円 $x^2 + y^2 = 2$ に内接する正方形 PQRS がある．点 P の座標が $(1, \sqrt{3})$ のとき，残りの頂点の座標を，行列 A の積を利用して求めよ．

c) 原点の回りの 90° 回転を行い，引き続き y 軸に関する対称移動を行うと，直線 $y = x$ に関する対称移動となる．このことを行列の積を用いて示せ．



$\boxed{6}$ あるアメリカの大学の学生寮では朝食に，プレーン，セサミ，ガーリックの 3 種類のベーグルを用意している．学期中，毎朝同じ学生達がやって来て，ベーグルを一つずつ選んでいく．この学生たちの行動を観察すると次のようなことがわかった．

- 同じベーグルを 2 日続けて選ぶ学生はいない．
- ある日プレーンを選んだ学生の半分は次の日セサミを選び，残りの半分はガーリックを選ぶ．
- ある日セサミを選んだ学生の 3 分の 2 は次の日プレーンを選び，残りの 3 分の 1 はガーリックを選ぶ．
- ある日ガーリックを選んだ学生の 3 分の 2 は次の日プレーンを選び，残りの 3 分の 1 はセサミを選ぶ．

a) 第 n 日目に学生たちが選んだプレーン・ベーグルの数を p_n，セサミ・ベーグルの数を s_n，ガーリック・ベーグルの数を g_n としたとき．ある行列 M を用いて

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ s_{n+1} \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ s_n \\ g_n \end{pmatrix}$$

と表せる．行列 M を求めよ．

b) 学期が進んでくると，食堂が用意しなければならないそれぞれの種類のベーグルの数は一定に近づく．それぞれの種類の個数を表すベクトルは M の不動ベクトルとなることを利用し，それらの割合を求めよ．