特別教養(18) 模擬試験 略解

1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{④}-\text{①}\times 4]{\text{②}-\text{①}\times 3,\ \text{③}-\text{①}\times 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{②}\times(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{④}+\text{②}\times 2]{\text{③}-\text{②}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{③}\times(-\frac{1}{8})} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{④}-\text{③}\times 6} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{②}-\text{④}\times 7]{\text{①}-\text{④}\times 3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{①}-\text{②}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$y=t$ とおいて

$$\begin{cases} x = -2t+1 \\ y = t \\ z = -3 \\ w = 2 \end{cases}$$

2 a) 基本変形の部分で、一番右の列を無視して、右側の行列を見ることにより

$w=t$ とおくと、 $x=t$, $y=t$, $z=t$, $w=t$ となる

b) 基本変形後の行列の一番下の行は $0=d+b$ と読める。したがって

$d=-b$ でなければならない。このとき $w=t$ とおくと

$$\begin{cases} x = t+a-c \\ y = t-b-c \\ z = t+a-b \\ w = t \end{cases}$$

c) A^{-1} が存在したとすると $A\vec{x}=\vec{0}$ の解は

$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$.

しかし a) より $A\vec{x}=\vec{0}$ の解は無数にあり矛盾。ゆえに A^{-1} は存在しない。

3 a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}+\text{①}\times 2]{\text{②}+\text{①}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}+\text{②}\times 3]{\text{①}+\text{②}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{③}\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②}+\text{③}]{\text{①}-\text{③}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad \therefore \text{逆行列} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) 問題の連立1次方程式は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書ける

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} . \qquad \therefore x = -1, y = 2, z = 1$$

4

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -4 \\ -5 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad QP = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5 a) $A = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{OQ} = A\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore Q(-\sqrt{3}, 1)$

$\overrightarrow{OR} = -\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \left(= A\overrightarrow{OQ}\right) \qquad \therefore R(-1, -\sqrt{3})$

$\overrightarrow{OS} = -\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left(= A\overrightarrow{OR}\right) \qquad \therefore S(\sqrt{3}, -1)$

c) 原点のまわりの90°回転に引き続き y 軸に関する対称移動を行うという変換を行列で表わすと $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

これは $(x, y) \longmapsto (x', y') = (y, x)$ を意味し，これは $y = x$ に関する対称移動に他ならない

6 a) $\begin{cases} p_{n+1} = \frac{2}{3}s_n + \frac{2}{3}g_n \\ s_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}g_n \\ g_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}s_n \end{cases}$ すなわち $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ s_{n+1} \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ s_n \\ g_n \end{pmatrix}$

b) 定常状態を表すベクトルを $\begin{pmatrix} p \\ s \\ g \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ s \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ s \\ g \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ をみたす

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-①\times\frac{1}{2}]{②-①\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{②\times(-\frac{3}{2})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[③-②\times\frac{2}{3}]{①+②\times\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$g = t$ とおくと $\begin{cases} p = \frac{4}{3}t \\ s = t \\ g = t \end{cases}$

$p+s+g = 1$ $(=100\%)$ となるように t を決めると $t = \frac{3}{10}$ となり

$p = \frac{4}{10}$ $\quad s = \frac{3}{10}$ $\quad g = \frac{3}{10}$

すなわち　プレーン 40%，セサミ 30%，ガーリック 30%