1 行列 A とベクトル $\vec{x}$, $\vec{b}$ を

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&4\\2&3&3&2\\3&4&5&1\\4&4&8&1\end{pmatrix},\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\a\end{pmatrix}$$

と定義する．このとき行列 $(A\mid\vec{b})$ は行に関する基本変形によって下のように変形される．

$$(A\mid\vec{b})=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&4&2\\2&3&3&2&1\\3&4&5&1&1\\4&4&8&1&a\end{array}\right)\rightarrow\cdots\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&0&4\\0&1&-1&0&-3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&a-5\end{array}\right)$$

a) 方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ の解をすべて求めよ．

b) 方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ が解を持つように定数 a を決め，そのときの解をすべて求めよ．

c) 行列 A は逆行列 A^{-1} を持つか？ 持つ場合は A^{-1} を求めよ．

a) $A\vec{x}=\vec{0} \iff \begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x+3z=0\\y-z=0\\w=0\end{cases}$

$z=t$ とおくと $\begin{cases}x=-3t\\y=t\\z=t\\w=0\end{cases}$

b) 変形後の1番下の行は $0=a-5$ を意味する。
したがって $a=5$ でなければならない。このとき

$\begin{cases}x+3z=4\\y-z=-3\\w=1\end{cases}$

$z=t$ とおいて $\begin{cases}x=-3t+4\\y=t-3\\z=t\\w=1\end{cases}$

c) A が逆行列を持ったとすると $A\vec{x}=\vec{b} \iff \vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ となり
解 $\vec{x}$ が1つに決まる。しかし，b) より $A\vec{x}=\vec{b}$ は無数に解をもつので
A は逆行列をもたない。

2016年12月21日

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

2 a) $\begin{pmatrix}1&-1&-4\\-1&-4&-1\\-4&-1&1\end{pmatrix}$ の逆行列をもとめよ．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-4&1&0&0\\-1&-4&-1&0&1&0\\-4&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[③+①\times4]{②+①}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-4&1&0&0\\0&-5&-5&1&1&0\\0&-5&-15&4&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\times(-\frac{1}{5})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-4&1&0&0\\0&1&1&-\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&0\\0&-5&-15&4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{③+②\times5}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-4&1&0&0\\0&1&1&-\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&0\\0&0&-10&3&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\times(-\frac{1}{10})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-4&1&0&0\\0&1&1&-\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&0\\0&0&1&-\frac{3}{10}&\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}\end{array}\right)\xrightarrow[②-③]{①+③\times4}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}\\0&1&0&\frac{1}{10}&-\frac{3}{10}&\frac{1}{10}\\0&0&1&-\frac{3}{10}&\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①+②\times4}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{10}&\frac{1}{10}&-\frac{3}{10}\\0&0&1&\frac{1}{10}&-\frac{3}{10}&\frac{1}{10}\\0&0&0&-\frac{3}{10}&\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}\end{array}\right)$$

逆行列

$$\therefore\ \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&-1\end{pmatrix}$$

b) 次の連立一次方程式の解を b) の結果を用いて求めよ．

$$\begin{cases}x-y-4z=1\\-x-4y-z=4\\-4x-y+z=-9\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-4\\-1&-4&-1\\-4&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\-9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1&1&-3\\1&-3&1\\-3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\-9\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}30\\-20\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$\therefore\ x=3,\ y=-2,\ z=1$

【裏に続く】

3 Three neighbors have backyard vegetable gardens. Neighbor A grows tomatoes, neighbor B grows corn, and neighbor C grows lettuce. They agree to divide their crops among themselves as follows: A gets $\frac{1}{2}$ of the tomatoes, $\frac{1}{3}$ of the corn, and $\frac{1}{4}$ of the lettuce. B gets $\frac{1}{3}$ of the tomatoes, $\frac{1}{3}$ of the corn, and $\frac{1}{4}$ of the lettuce. C gets $\frac{1}{6}$ of the tomatoes, $\frac{1}{3}$ of the corn, and $\frac{1}{2}$ of the lettuce. What prices should the neighbors assign to their respective crops if the equilibrium condition of a closed economy is to be satisfied, and if the lowest-priced crop is to have a price of $100?

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Aが生産したトマトの値段を} & & & x \\ \text{B} \quad 〃 & \text{トウモロコシ} & 〃 & y \\ \text{C} \quad 〃 & \text{レタス} & 〃 & z \end{array}\right\} \text{とする.}$$

消費者としてのAは $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z$ を受けとる.

〃 B 〃 $\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z$ 〃

〃 C 〃 $\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z$ 〃

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=x \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=y \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=0 \\ \frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{4}z=0 \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{2}z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{①\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[②-①\times\frac{1}{6}]{②-①\times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{12} \\ 0 & \frac{4}{9} & -\frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\times(-\frac{9}{4})} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{15}{16} \\ 0 & \frac{4}{9} & -\frac{5}{12} \end{pmatrix} \xrightarrow[①+②\times\frac{2}{3}]{③-②\times\frac{4}{9}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{15}{16} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$z=16t$ とおくと. $\begin{cases} x=18t \\ y=15t \\ z=16t \end{cases}$

$15t=100$ とすると. $t=\frac{20}{3}$ だから $x=120,\ y=100,\ z=\frac{320}{3}\fallingdotseq 106.7$

4 行列 $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換により，座標平面上の 2 点 A，B がそれぞれ 2 点 C(3, 0), D(1, 2) に移るとする.

a) M の逆行列を求めよ.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ だから $M^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

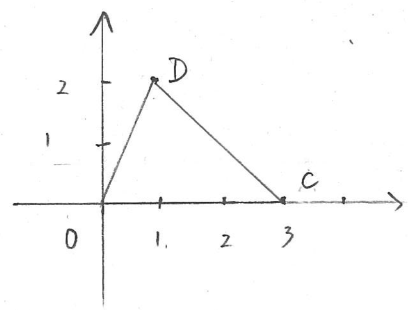
b) 点 A，B の座標を求めよ.

$\overrightarrow{OA}=M^{-1}\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore C\left(\frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$

$\overrightarrow{OB}=M^{-1}\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore D\left(\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

c) O を原点とするとき，△OAB の面積を求めよ.

［ヒント：まず，△OCD の面積を求め，それから M の行列式を用いて △OAB の面積を求めるとよい.］



△OCDの面積

$=$ (△OABの面積) × (Mの行列式の絶対値)

△OCDの面積 $=\frac{1}{2}\times$底辺$\times$高さ $=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$

Mの行列式 $=-7$

$\therefore$ △OABの面積 $=\frac{3}{|-7|}=\frac{3}{7}$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)