入学年度	学部	学科		組		番号		検	フリガナ
									氏名

1 原点のまわりの角 α の回転移動を行い，引き続き角 β の回転移動を行うと，原点のまわりの角 $\alpha+\beta$ になる．したがって，回転移動を表す行列の間に次の関係式が成り立つ．

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

右辺を計算して，両辺の対応する成分を比較することにより，三角関数の加法定理を導け．

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\alpha) \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

2 座標平面上で，x-軸に関する対称移動を行い，引き続き直線 $y=x$ に関する対称移動を行うと，原点の回りの 90° 回転となる．このことを行列の積を用いて証明せよ．

x 軸に関する対称移動　$(x, y) \mapsto (x, -y)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$y=x$ に関する対称移動　$(x, y) \longmapsto (y, x)$

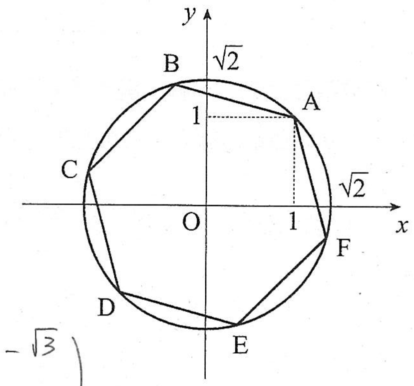
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

引き続き行うと．

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{y=x\text{（後）}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{x\text{軸（先）}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}}_{90^\circ\text{回転の行列}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

[3] 右の図のように，円 $x^2+y^2=2$ に内接する正六角形 ABCDEF がある．点 A の座標が $(1,1)$ のとき，残りの頂点の座標を求めよ．



60°回転の行列 $\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3}-\sqrt{3}(1+\sqrt{3}) \\ \sqrt{3}(1-\sqrt{3})+1+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

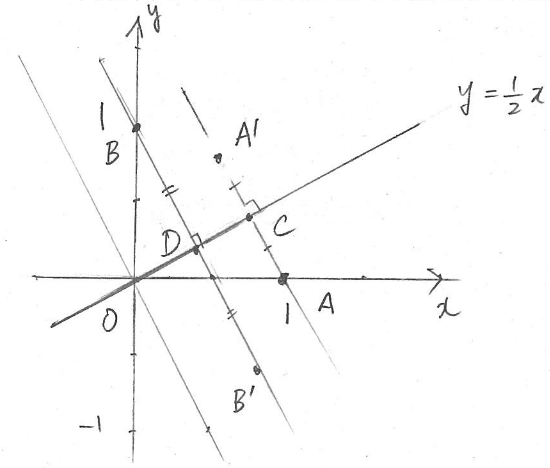
$$\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $D(-1,-1)$

$E\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $F\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

[4] 直線 $y=\frac{1}{2}x$ に関する対称移動を表す行列を求めよ．

［ヒント：点 $(1,0)$，$(0,1)$ がそれぞれどのような点にうつされるかを考えればよい．］



$A(1,0)$，$B(0,1)$ とする

$y=\frac{1}{2}x$ に垂直な直線の傾きは -2.

$A(1,0)$ を通り，傾き -2 の直線

$$y-0=-2(x-1)$$
$$y=-2x+2$$

$y=-2x+2$ と $y=\frac{1}{2}x$ の交点 C は A と A′ の中点

$$\begin{cases} y=-2x+2 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x=-2x+2$$
$$x=\frac{4}{5},\ y=\frac{1}{2}x=\frac{2}{5} \qquad \therefore C\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$B(0,1)$ を通り傾き -2 の直線 $y-1=-2(x-0)$

$$y=-2x+1$$

$y=-2x+1$ と $y=\frac{1}{2}x$ の交点 D は B と B′ の中点

$$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}x+1$$
$$x=\frac{2}{5},\ y=\frac{1}{2}x=\frac{1}{5} \qquad \therefore D\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=2\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)