

復習問題の略解

- 1 a) $3x^2 + 10x + 8 = (3x + 4)(x + 2)$
 b) $6a^2 + 11ab - 2b^2 = (a + 2b)(6a - b)$
 c) $x^4y - xy^4 = xy(x^3 - y^3) = xy(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
 d) $81a^3 + 3 = 3((3a)^3 + 1^3) = 3(3a + 1)(9a^2 - 3a + 1)$

2 筆算による割り算を実行すると、商は $3x + 2$ 、余りは $x + 6$ となる。
 (これより、 $3x^3 - 4x^2 + 12x + 16 = (x^2 - 2x + 5)(3x + 2) + (x + 6)$ と表せる.)

- 3 a) $P(2) = 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 24 = 0$. これより、 $P(x)$ を $x - 2$ で割ったときの余りは 0 であること、すなわち $P(x)$ は $x - 2$ で割り切れることがわかる。
 b) $P(x)$ を $x - 2$ で割ると、 $P(x) = (x - 2)(x^2 + 7x + 12)$. さらに因数分解して $P(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 4)$.
 c) $x^3 + x^2 - 6x = x(x - 2)(x + 3)$ と因数分解されるので、最大公約数は $(x - 2)(x + 3)$ 、最小公倍数は $x(x - 2)(x + 3)(x + 4)$.

- 4 a) $\frac{b}{a^3}$ b) $3x^{-2}$ c) 2 d) $9x^2y^3$
 5 a) $\frac{1}{abc}$ b) $\frac{8ab - 6a + 5b}{15ab}$ c) $\frac{-x(2x - 13)}{(2x - 1)(2x + 5)}$ d) $-\frac{x - 3}{(x - 1)(x - 2)}$
 e) $-\frac{x + 27}{(x - 3)^2(x + 3)}$ f) $\frac{x + 14}{(x + 2)^2(x - 2)}$ g) 0 h) $\frac{y - x}{xy - 1}$ i) $\frac{1}{x}$

6 もとの立方体の1辺の長さを x とする。縦横を変えて作った立方体の体積は $(x - 2)(x + 5)x$. これがもとの立方体の体積 x^3 より 48cm^3 増加したのだから、 $(x - 2)(x + 5)x = x^3 + 48$. これを整理し、因数分解すると $(3x + 8)(x - 6) = 0$. ここで、 $x > 0$ だから、 $x = 6$ が唯一の解となる。

- 7 a) $x \leq -3, x \geq 1,$ b) $3 - \sqrt{2} < x < 3 + \sqrt{2}$ c) $x < -1 - \sqrt{2}, x > -1 + \sqrt{2}$

8 $y = x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3$ とし、 $-1 \leq x \leq 5$ においてグラフまたは増減表をかく。 $x = 5$ のとき最大で、最大値 13. $x = 1$ のとき最小で、最小値 -3.

- 9 a) 1円値上げすると $\frac{1}{2}$ 個売り上げが減るということだから、 x 円値上げすると $\frac{x}{2}$ 個売り上げが減る. したがって、売価が $(80 + x)$ 円るとき何個の売り上げは $(100 - \frac{x}{2})$ となり、売上金額は (売価) × (売り上げ個数) = $(80 + x)(100 - \frac{x}{2}) = -\frac{1}{2}(x - 60)^2 + 9800$. これより、最の売り上げ金額を得るための売価は $80 + 60 = 140$ 円。
 b) a) より、最の売り上げ金額を得るの $x = 60$ のとき、このとき、売価は $80 + 60 = 140$ 円.

10 短い辺の長さを x とすると、長い辺の長さは $10 - x$ となる。「短い辺」が「長い辺」より本当に短いための条件は $x < 10 - x$. すなわち $x < 5$ である. 一方、長方形の面積は $x(10 - x)$ なので、

$$x(10 - x) \geq 21 \iff -x^2 + 10x - 21 \geq 0 \iff (x - 3)(x - 7) \leq 0 \iff 3 \leq x \leq 7$$

これと先ほどの条件を合わせて $3 \leq x < 5$.

- 11 a) 5 b) 1 c) $\frac{10}{3}$ d) 5

12 1回濾過するたびに有害物質の量は $\frac{2}{10}$ になるので、濾過を n 回繰り返したとき、有害物質の量はもとの $(\frac{2}{10})^n$ になる. これが $\frac{1}{10000}$ 以下になるようにしたい. すなわち、 $(\frac{2}{10})^n < \frac{1}{10^4}$ となる n を求めればよい. 両辺の \log_{10} をとり、対数の基本性質を用いて変形すると、 $n(\log_{10} 2s - \log_{10} 10) < \log_{10} 1 - \log_{10} 10^4$. さらに変形して $n(\log_{10} 2 - 1) < -4$. ここで、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いて数値計算すると (n の係数が負なので不等号の向きが変わることに注意して)、 $n > 5.7227 \dots$. すなわち、6回濾過すればよいことがわかる.

- 13 a) $\frac{3}{2}$ b) $\sqrt{2} \cos(-\frac{5}{4}\pi) + 3 \sin \frac{3}{2}\pi - \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{7}{2}$

14) a) $\theta = \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

b) $\theta = \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

15) a) 3

b) -2

c) a

16) a) $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2h-1)^2 - (-1)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4h - 4) = -4$

b) $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(1+h)-1)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4h + 4) = 4$

c) $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(a+h)-1)^2 - (2a-1)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 + 8ah - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4h + 8a - 4) = 4(2a - 1)$

17) a) $f'(x) = 2(x + 3x^2) + 2x(1 + 6x) = 2x(2 + 9x)$

b) $f'(x) = 2(3x - 5) + (2x + 3) \cdot 3 = 12x - 1$

c) $f'(x) = (x^2 + x + 1) + (x - 1)(2x + 1) = 3x^2$ ($f(x) = x^3 - 1$ に気が付けばすぐに求まる.)

18) a) 16

b) 8

c) $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - (2+h)^2 - (2+h) + 1 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 5h^2 + 7h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 5h + 7) = 7$

d) $y = 7x - 11$

e) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ f) $x = 1, -\frac{1}{3}$

g) $f'(x) = -1$ となる x は 0 と $\frac{2}{3}$. $x = 0$ での接線 $y = -x + 1$. $x = \frac{2}{3}$ での接線 $y = -x + \frac{23}{27}$

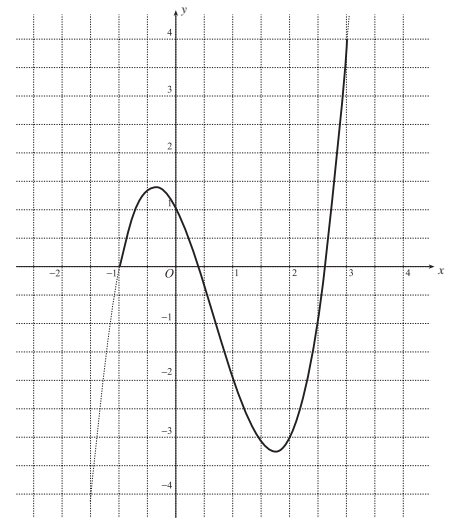
h) 増減表を書くと $x = -\frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{32}{27}$, $x = 1$ で極小値 0 .

19) $f'(x) = 3x^2 - 4x - 2$ で, $f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$ のとき.

$-1 < \frac{2 - \sqrt{10}}{3} < \frac{2 + \sqrt{10}}{3} < 3$ となるので, この範囲で増減表を書くと

x	-1		$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	4

したがって, $f(x)$ は $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$ のとき最小で, 最小値 $-\frac{25 - 20\sqrt{10}}{27} \approx -3.27$, $x = 3$ のとき最大で, 最大値 4 となる. グラフは右の図のようになる.



20) a) 各辺が正でなければいけないので $x > 0$ かつ $10 - 2x > 0$ かつ $16 - 2x > 0$. ゆえに $0 < x < 5$.

b) 体積 $V = x(10 - 2x)(16 - 2x) = 4x(5 - x)(8 - x)$.

c) $V' = (4(x^3 - 13x^2 + 40x))' = 4(3x^2 - 26x + 40) = 4(x - 2)(3x - 20)$. $0 < x < 5$ の範囲で $V' = 0$ となるのは $x = 2$ のみ. $0 < x < 5$ の範囲で増減表を書くと下のようになる.

x	0		2		5
V'		+	0	-	
V	0	↗	144	↘	0

したがって, $x = 2$ のとき, 体積 V は最大となる.