復習問題

1 つぎの 2 変数関数について，各変数に関する偏微分を計算せよ．

a) $f(x,y) = x^4 - 4x^2y^2 + 3xy^3 - y^4 + 3$　b) $f(x,y) = (x+2y^2+1)^3$

c) $f(x,y) = x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{3}{5}}$　d) $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$

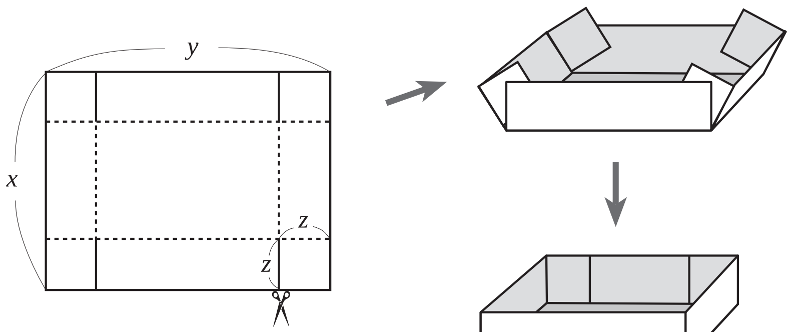
2 次の関数の臨界点を求め，各臨界点において極大・極小を判定せよ．

a) $f(x,y) = x^3 - 6x^2 + x^2y^2 - y^2$　b) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = (x-y)e^{xy}$

3 条件 $x^2 + xy + y^2 = 1$ のもとで，xy の最大値と最小値を求めよ．

4 たて x cm，よこ y cm のボール紙を使い，図のように四隅に z cm の切り口をいれ，z cm 四方の のりしろを作って折り曲げ，のりで貼ることにより，ふたのない箱をつくる．このとき，使用するボール紙の面積を一定値 a^2 に保ったまま，箱の容積を最大にすることを考える．ただし，a は正の定数とする．



a) 箱の容積を x と z の 2 変数関数とみて，それを $V(x,z)$ と書く．$V(x,z)$ を具体的に書き表せ．

b) 関数 $V(x,z)$ を領域 $D = \{(x,z) \mid 0 < 2z < x, 2xz < a^2\}$ 上で考える．$V(x,z)$ の偏微分を計算し，D 内における臨界点（すべての偏微分が 0 になる点）を求めよ．

c) 上で求めた臨界点において $V(x,z)$ が最大になることは認める．$V(x,z)$ の D における最大値を求めよ．また，そのときの箱の寸法はどのようなものであるかを述べよ．

d) 箱の容積を x, y, z の 3 変数関数とみて，$V(x,y,z)$ と書く．Lagrange の乗数法を用い，$V(x,y,z)$ が $xy = a^2$ という拘束条件の下で最大になるような x, y, z を求めよ．

5 消費者の効用関数が $u(x,y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}$ で与えられているとする．このとき，$40x + 18y = 120$ という条件のもとで効用 $u(x,y)$ を最大にするような (x,y) を Lagrange の乗数法により求めよ．

6 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx$ を以下の方法で求めよ．

a) $3x - 1 = t$ とおいて求めよ．　b) $\sqrt{3x-1} = t$ とおいて求めよ．

【裏につづく】

$\boxed{7}$ 次の不定積分を求めよ．

a) $\displaystyle\int x(3x+2)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

c) $\displaystyle\int (x+1)e^x\,dx$

d) $\displaystyle\int \log(x+1)\,dx$

$\boxed{8}$ $\sqrt{17} = 4\sqrt{1+\dfrac{1}{16}}$ という表示と $\sqrt{1+x}$ の 2 次近似の式を用い $\sqrt{17}$ の近似値を求めよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt{17}$ の値とは小数第何位まで一致するかを答えよ．

$\boxed{9}$ 漸近展開を用いて次の極限を求めよ．

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\log(1+x)}{e^x-1-x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}$

2016 年 12 月 20 日