「復習問題」略解

2017 年 1 月 17 日

$\boxed{1}$ a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 8xy^2 + 3y^3$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -8x^2y + 9xy^2 - 4y^3$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3(x+2y^2+1)^2$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12y(x+2y^2+1)^2$.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}$.

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$.

$\boxed{2}$ a) まず，臨界点を求めるために，連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 12x + 2xy^2 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y - 2y = 0$$

を解く．2 番目の式から $y(x-1)(x+1) = 0$ が得られるので，$y = 0$，$x = 1$，$x = -1$ をそれぞれ最初の式に代入し，$(x,y) = (0,0)$，$(4,0)$，$(1, \pm 3\sqrt{2}/2)$，$(-1, \pm\sqrt{30}/2)$ を得る．次に「多変数関数の極大・極小」の 2 ページ目にある $D(x,y)$ を計算し，同じ場所にある極大・極小の判定法を用いる．

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 \\ &= (6x - 12 + 2y^2)(2x^2-2) - (4xy)^2 \\ &= 4(3x^3 - 6x^2 - 3y^2x^2 - y^2 - 3x + 6) \end{aligned}$$

- $D(0,0) = 24 > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -12 < 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大.
- $D(4,0) = 360 > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 12 > 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(4,0)$ で極小.
- $D(1, \pm 3\sqrt{2}/2) = -72 < 0$ なので，$(1, \pm 3\sqrt{2}/2)$ は鞍点（峠点）.
- $D(-1, \pm\sqrt{30}/2) = -120 < 0$ なので，$(-1, \pm\sqrt{30}/2)$ は鞍点（峠点）.

b) まず，臨界点を求めると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\iff \quad 1 - x^2 + y^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad -2xy = 0$$

$$\iff \quad (x,y) = (1,0) \quad \text{または} \quad (-1,0)$$

2 階微分を計算し，極大・極小を判定すると以下のようになる.

- $D(1,0) = \dfrac{1}{4} > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(1,0)$ で極大.
- $D(-1,0) = \dfrac{1}{4} > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = \dfrac{1}{2} > 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(-1,0)$ で極小.

c) まず，臨界点を求めると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1 + xy - y^2)e^{xy} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-1 + x^2 - xy)e^{xy} = 0$$

$$\iff \quad 1 + xy - y^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad -1 + x^2 - xy = 0$$

$$\iff \quad (x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{または} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2 階微分を計算し，極大・極小を判定すると以下のようになる.

- $D\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{4}{e} < 0$ なので $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ は鞍点（峠点）.
- $D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{4}{e} < 0$ なので $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ も鞍点（峠点）.

$\boxed{3}$ $L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$ とおく.

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = y - \lambda(2x+y) = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = x - \lambda(x+2y) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

最初の 2 式から λ を消去すると $(y-x)(y+x) = 0$ が得られる．$y = x$ を第 3 式に代入すると $3x^2 - 1 = 0$ となり $(x,y) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$（複合同順、以下同様） が得られる．また，$y = -x$ を第 3 式に代入すると $x^2 - 1 = 0$ となり，$(x,y) = (\pm 1, \mp 1)$ が得られる．$(x,y) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ での xy の値は $\dfrac{1}{3}$ であり，$(x,y) = (\pm 1, \mp 1)$ での xy の値は -1 であるから，最大値は $\dfrac{1}{3}$，最小値は -1 となる.

$\boxed{4}$ a) 箱の底辺の縦と横の長さはそれぞれ，$x - 2z$，$y - 2z$ であり，箱の高さは z である．ボール紙の面積は一定値 a^2 という条件より $xy = a^2$．これを用いて y を消去して，

$$V = (x-2z)(y-2z)z = (x-2z)\left(\frac{a^2}{x} - 2z\right)z$$

b) $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$ を解けばよい.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2z^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = a^2 - 4z\left(x + \frac{a^2}{x}\right) + 12z^2,$$

となり，D 内においては V の臨界点は $(x,z) = \left(a, \dfrac{a}{6}\right)$ のみであることがわかる.

c) $(x, z) = \left(a, \dfrac{a}{6}\right)$ のとき，$V = \dfrac{2a^3}{27}$ となる．また，このとき $y = a$ でもある．したがって，箱の寸法は，縦 $\dfrac{2a}{3}$, 横 $\dfrac{2a}{3}$, 高さ $\dfrac{a}{6}$ ということになる.

d) $L(x, y, z) = V(x, y, z) - \lambda(xy - a^2) = (x - 2z)(y - 2z)z - \lambda(xy - a^2)$ とおく.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (y - 2z)z - \lambda y, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = (x - 2z)z - \lambda x,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = xyz - 2(x + y)z^2 - z^3, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = xy - a^2$$

最初の 2 つの式から $z(y - x) = 0$ を得る．まず，$z = 0$ とすると，$V = 0$ となり，V は最大にはならないので，不可.

次に $y = x$ とする．これを第 3 式に代入すると，$(x - 2z)(x - 6z) = 0$ となる．ここで，$x = 2z$ のときも $V = 0$ となるので不可．よって $x = 6z$．さらに，$y = x$ を第 4 式に代入すると $x = y = a$．すなわち，$x = y = a$，$z = \dfrac{a}{6}$ のとき V は最大となる．このとき，箱の底面は一辺 $x = \dfrac{2}{3}a$ の正方形で、高さは $\dfrac{a}{6}$ となる.

$\boxed{5}$ $L(x, y, \lambda) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}} - \lambda(40x + 18y - 120)$ とおく.

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}} - 40\lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}} - 18\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -(40x + 18y - 120) = 0$$

最初の 2 式は $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{3}{4}} = 160\lambda$，$\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{4}} = 24\lambda$ となるから，片々割り算して λ を消去すると $\dfrac{y}{x} = \dfrac{20}{3}$ が得られる．これより，$y = \dfrac{20}{3}x$ を第 3 式に代入すると $160x - 120 = 0$ となり $(x, y) = \left(\dfrac{3}{4}, 5\right)$ が得られ，このとき $u(x, y)$ は最大となる.

$\boxed{6}$ a) $3x - 1 = t$ とおくと，$x = \dfrac{t}{3} + \dfrac{1}{3}$．したがって，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{3}$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx = \int \frac{t+1}{3\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{9}\int \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right) dt = \frac{2}{27}t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}t^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

b) $\sqrt{3x - 1} = t$ とおくと，$x = \dfrac{t^2}{3} + \dfrac{1}{3}$．したがって，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t}{3}$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx = \int \frac{t^2+1}{3t} \cdot \frac{2t}{3}\,dt = \frac{2}{9}\int (t^2 + 1)\,dt = \frac{2}{27}t^3 + \frac{2}{9}t + C$$
$$= \frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

$\boxed{7}$ a) $\displaystyle\int x(3x + 2)\,dx = \int (3x^2 + 2x)\,dx = x^3 + x^2 + C$

b) $t = \log x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$．これより形式的に $dt = \dfrac{1}{x}dx$.

$$\int \frac{1}{x \log x}\,dx = \int \frac{1}{\log x} \cdot \left(\frac{1}{x}\,dx\right) = \int \frac{1}{t}\,dt = \log t + C = \log(\log x) + C$$

c) $u = x + 1, v' = e^x$ とおいて，部分積分 $\int uv' = uv - \int u'v$ を用いる．このとき $v = e^x$ であることに注意.

$$\int (x+1)e^x\,dx = (x+1)e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$$

d) 少しわかりにくいかもしれないが，$u = \log(x + 1)$, $v' = 1$ とおいて，部分積分を用いる．このとき $v = x$ となることに注意.

$$\int \log(x+1)\,dx = x\log(x+1) - \int x \cdot \frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= x\log(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\,dx\right) dx$$
$$= x\log(x+1) - (x - \log x) + C = (x+1)\log(x+1) - x + C$$

$\boxed{8}$ 「高次微分を用いた近似計算」の例と同様.

まず 2 次近似の式を用いて近似値を計算する.

$$\sqrt{17} = 4\sqrt{1 + \frac{1}{16}} \fallingdotseq 4\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^2\right) = 4.123046875$$

このときの誤差は $4R_3\left(\frac{1}{16}\right)$ であり,

$$0 \leqq 4R_3\left(\frac{1}{16}\right) \leqq 4 \cdot \frac{\frac{3}{8}}{3!}\left(\frac{1}{16}\right)^3 = 0.0000610\ldots$$

が成り立つ．したがって,

$$4.123046\cdots \leqq \sqrt{17} \leqq 4.123046 + 0.0000610 = 4.123107\ldots$$

を得る．よって，得られた近似値と $\sqrt{17}$ の値とは小数第 3 位の 4.123 までは必ず一致するといえる.

$\boxed{9}$ a) 1　　b) 1