漸近展開

$x = 0$ のまわりで定義された関数 $\varepsilon(x)$ が，$x \to 0$ としたとき 0 に近づくなら，すなわち $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ が成り立つなら，$\varepsilon(x)$ は無限小であるという．例として，$n > 0$ のとき，関数 x^n は無限小である．また，n が大きくなればなるほど，x^n が 0 に近づく速さが速くなる．そこで，$\varepsilon(x)$ が n 次より高次の無限小であることを $\lim_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon(x)}{x^n} = 0$ と定義する．いま，$f(x)$ と $g(x)$ の差が n 次より高次の無限小であるとき，これを $f(x) = g(x) + o(x^n)$ と書く．これは $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-g(x)}{x^n} = 0$ であることを表す略記法である．
さて，関数 $f(x)$ を $x = 0$ のまわりで多項式によって近似することを考える．いま，$f(x)$ とある多項式との差が無限小である，すなわち，

$$f(x) = (n \text{ 次の多項式}) + o(x^n)$$

と表せたとする．この形の式を $f(x)$ の $x = 0$ のまわりでの漸近展開と呼ぶ．このとき通常は $o(x^n)$ は「x^{n+1} 以上の項」をひとくくりにしたものと考えて差し支えない．$f(x)$ の漸近展開は $x \to 0$ としたときの極限の計算に有用である．
いま，$f(x)$ が $x = 0$ で n 階微分可能であるとき，$f(x)$ は

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

という漸近展開をもつことが証明できる．以下はこれを用いてつくられた漸近展開である．一般の関数の漸近展開はこれらの式から和・差・積・商および合成の操作を組み合わせて求めることができる．

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$\boxed{1}$ 次の関数の $x = 0$ のまわりの漸近展開を（ ）内の次数の項まで求めよ．

a) $\sqrt{1-x}$ （x^4 の項まで） b) $\dfrac{1}{1+x^2}$ （x^6 の項まで） c) $\dfrac{x}{1+x^3}$ （x^7 の項まで）

d) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （x^6 の項まで） e) $\sqrt[3]{1+x^3}$ （x^9 の項まで） f) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ （x^4 の項まで）

$\boxed{2}$ 漸近展開を用いて次の極限を求めよ．

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \log(x+1)}{x^2}$ b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^x - x - x^2}{x - \log(1+x)}$ c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$

2016 年 12 月 20 日