入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1 指数関数 $f(x) = a^x$ の $x = 0$ における微分係数を求めたい．

a) $f(x) = a^x$ の $x = 0$ における微分係数を求める定義式を書け．　$f'(0) =$

b) 次の表は $a = 2, a = 3$ のときの $\dfrac{a^h - 1}{h}$ の値を計算するためのものである．$\sqrt{\ }$ 機能のある電卓を用いて，$2^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{1.414\cdots}$，$2^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \ldots$ のように計算することにより，表の空欄を埋め，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{2^h - 1}{h}$ および $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{3^h - 1}{h}$ を推測せよ．

h	$\dfrac{2^h-1}{h}$	$\dfrac{3^h-1}{h}$
$\frac{1}{2}$	$(1.41421356\ldots - 1)\times 2 = 0.82842712\ldots$	$(1.73205080\ldots - 1)\times 2 = 1.4641016\ldots$
$\frac{1}{4}$	$(1.18920711\ldots - 1)\times 4 =$	$(1.31607401\ldots - 1)\times 4 =$
$\frac{1}{8}$	$=$	$=$
$\frac{1}{16}$	$=$	$=$
$\frac{1}{32}$	$=$	$=$
$\frac{1}{64}$	$=$	$=$
$\frac{1}{128}$	$=$	$=$
$\frac{1}{256}$	$=$	$=$
$\frac{1}{512}$	$=$	$=$
$\frac{1}{1024}$	$=$	$=$
$\vdots$	$\downarrow$	$\downarrow$
0		

2 数 e は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$ をみたす．これを用いて次の各々の関数の導関数を定義を直接用いて求めよ．

a) $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$
$$= e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

b) $f(x) = xe^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)e^{x+h} - xe^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{xe^x e^h - xe^x + he^{x+h}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{xe^x(e^h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} e^{x+h}$$
$$= xe^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} + e^x = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

3 指数関数と対数関数の互いには $e^{\log a} = a$ という関係が成り立つのであった．これより，$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x\log a}$ である．このことと合成関数の微分公式を用いて，指数関数 a^x の導関数 $(a^x)'$ をもとめよ．

$$(a^x)' = ((e^{\log a})^x)' = (e^{x\log a})' = e^{x\log a}\cdot(x\log a)'$$
$$= a^x \cdot \log a$$

4 $f(x) = e^x$ とすると，自然対数関数 $\log x$ はその逆関数である，すなわち $f^{-1}(x) = \log x$ である．逆関数の微分公式と $f'(x) = e^x$ であることを用い，$f^{-1}(x) = \log x$ の導関数を求めよ．

$$(\log x)' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\log x)} = \frac{1}{e^{\log x}}$$
$$= \frac{1}{x}$$

5 次の表は $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を計算するためのものである．$h=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots,\frac{1}{1024}$ として電卓を用いて $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を計算し，表の空欄を埋め，極限値 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を推測せよ．

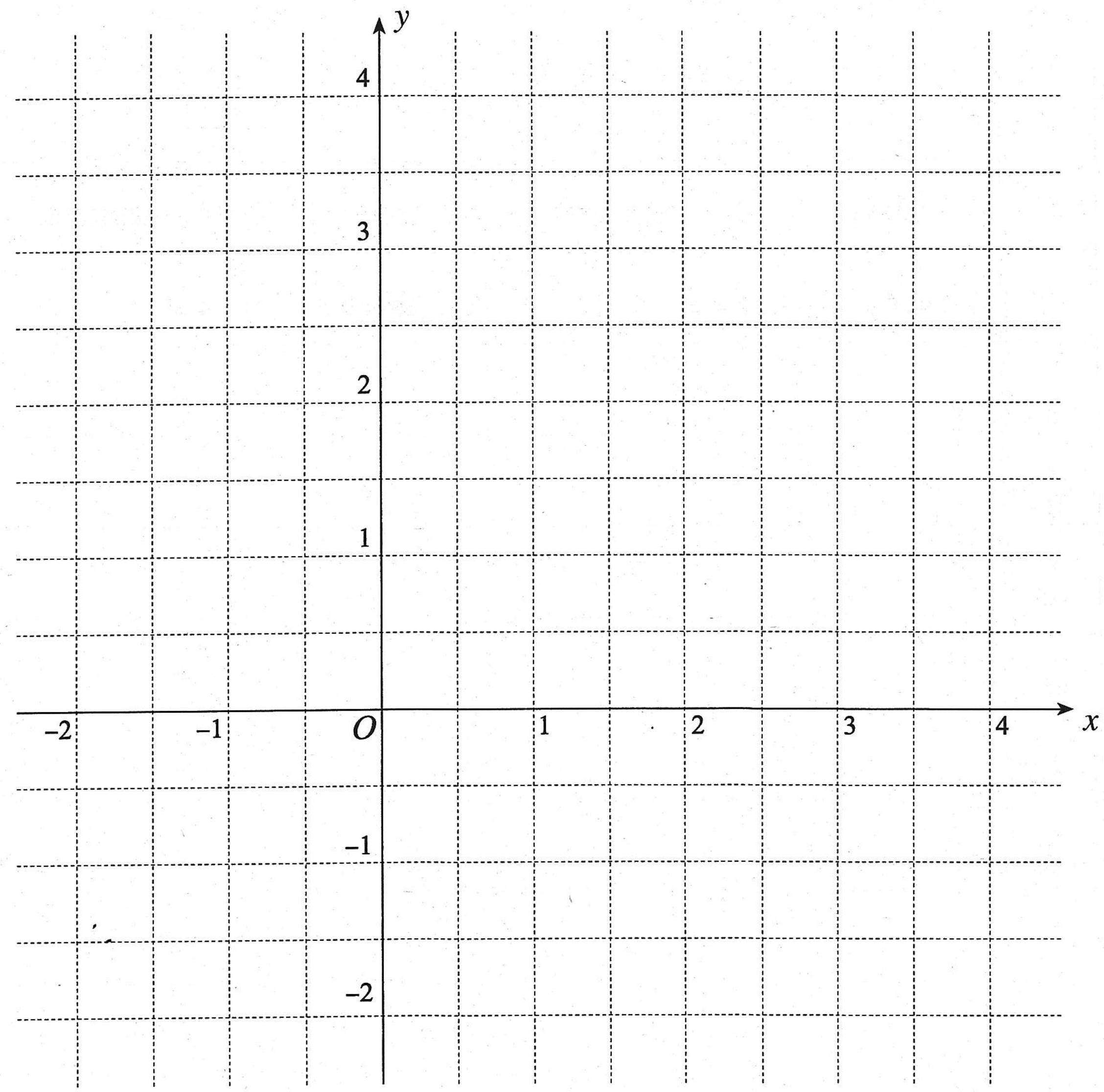
[電卓では数の 2 乗を計算するのに "× =" と入力すればよい．例えば，$((1\div 4+1)^2)^2$ を計算するには，1，÷，4，+，1，=，×，=，×，=，の順に入力すればよい．]

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
$\frac{1}{2}$	$(1\div 2+1)^2=2.25$
$\frac{1}{4}$	$((1\div 4+1)^2)^2=2.441406\dots$
$\frac{1}{8}$	$=$
$\frac{1}{16}$	$=$
$\frac{1}{32}$	$=$
$\frac{1}{64}$	$=$
$\frac{1}{128}$	$=$
$\frac{1}{256}$	$=$
$\frac{1}{512}$	$=$
$\frac{1}{1024}$	$=$
$\vdots$	$\downarrow$
0	

6 関数 $y=e^x$ について，いろいろな x に対する y の値は次の表のようになる．

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
e^x	0.1353	0.2231	0.3679	0.6065	1.0000	1.6487	2.7183	4.4817	7.3891	12.183

これを利用して，指数関数 $y=e^x$ のグラフを描き，そのグラフの $(0,1)$ における接線を引いてみよ．また，対数関数 $y=\log x$ は $y=e^x$ の逆関数であることを用い，$y=\log x$ のグラフを描き，$(1,0)$ における接線を引いてみよ．



担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)

中央大学