$\boxed{1}$ 2 つの微分可能な関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f\big(g(x)\big)$ の導関数を $y = f(u)$, $u = g(x)$ の導関数で表したい．いま，

x の増分 Δx に対する u の増分を Δu，
u の増分 Δu に対する y の増分を Δy

とすると，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は，Δu を間に挟んで

$$(*)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

と書ける．ここで，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ となるから，

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \boxed{}\cdot\boxed{}$$

が成り立つ．これが，合成関数の微分公式の一つの形である．

これを，$'$ を用いた記法で表すことを考えよう．合成関数 $f\big(g(x)\big)$ の導関数 $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'$ は

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x}$$

で定義される．ここで，x の増分 Δx に対し，u の増分 Δu は

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$$

と書ける．$g(x) = u$ と書き換えて，これを変形すると

$$g(x+\Delta x) = u + \Delta u$$

となり，さらに

$$\Delta y = f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big) = f(u+\Delta u) - f(u)$$

と書くことができる．これらを用いて $(*)$ を書き直すと

$$\frac{f\big(g(x+\Delta)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

となる．ここで $\Delta x \to 0$ とすると $\Delta u \to 0$ だから，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

したがって，

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'(u)\cdot\boxed{}$$

ここで，$u = g(x)$ を用いて $f'(u)$ を x で表すと $f'(u) = \boxed{}$ と書き直せる．こうして，次の合成関数の微分公式が得られる．

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = \boxed{}$$

入学年度		学部	学科		組		番号			検	フリガナ	
											氏名	

2 $\left(f\left(g\left(h(x)\right)\right)\right)'$ を求めよ.

3 関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の微分公式を導きたい．関数と逆関数は $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ をみたすことに注目する．そこで，$f^{-1}(x) = g(x)$ とおいて $g'(x)$ を求めることを考える.

a) $f(g(x)) = x$ の両辺を合成関数の微分法を用いて微分せよ.

b) 上で得られた式を $g'(x)$ について解け.

c) 逆関数の導関数 $\left(f^{-1}(x)\right)'$ を $f^{-1}(x)$，$f'(x)$ を用いて表せ.

【裏に続く】

次の一連の問題の目的は，公式 $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを証明することである．n が整数の場合については前回すでに $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ が成り立つことを示してある.

$\boxed{4}$ 【$a = 1/n$ の場合】$f(x) = x^n$ とすると，関数 $\sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x)$ の逆関数である．すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である.

a) 問題 3 で得られた逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ.

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'$ の微分公式を導け.

$\boxed{5}$ 【a が有理数の場合】$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ であることを用い，合成関数の微分公式を用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ の微分公式を導け.

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)

$\boxed{6}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (1-2x^2)^3$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$

$f'(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

$f'(x) =$

d) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$f'(x) =$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$f'(x) =$

f) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

$f'(x) =$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-x+1}$

$f'(x) =$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) =$