入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1 2つの微分可能な関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f\big(g(x)\big)$ の導関数を $y = f(u)$, $u = g(x)$ の導関数で表したい．いま，

x の増分 Δx に対する u の増分を Δu,
u の増分 Δu に対する y の増分を Δy

とすると，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は，Δu を間に挟んで

$$(*)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

と書ける．ここで，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ となるから，

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \boxed{\frac{dy}{du}}\cdot\boxed{\frac{du}{dx}}$$

が成り立つ．これが，合成関数の微分公式の一つの形である．

これを，$'$ を用いた記法で表すことを考えよう．合成関数 $f\big(g(x)\big)$ の導関数 $\big(f\big(g(x)\big)\big)'$ は

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x}$$

で定義される．ここで，x の増分 Δx に対し，u の増分 Δu は

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$$

と書ける．$g(x) = u$ と書き換えて，これを変形すると

$$g(x+\Delta x) = u + \Delta u$$

となり，さらに

$$\Delta y = f\big(g(x+\Delta)\big) - f\big(g(x)\big) = f(u+\Delta u) - f(u)$$

と書くことができる．これらを用いて $(*)$ を書き直すと

$$\frac{f\big(g(x+\Delta)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

となる．ここで $\Delta x \to 0$ とすると $\Delta u \to 0$ だから，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

したがって，

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)' = f'(u)\cdot\boxed{g'(x)}$$

ここで，$u = g(x)$ を用いて $f'(u)$ を x で表すと $f'(u) = \boxed{f(g(x))}$ と書き直せる．こうして，次の合成関数の微分公式が得られる．

$$\big(f\big(g(x)\big)\big)' = \boxed{f'(g(x))\,g'(x)}$$

2 $\Big(f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)\Big)'$ を求めよ．

$$\big(f(g(h(x)))\big)' = f'(g(h(x)))\,\big(g(h(x))\big)'$$
$$= f'(g(h(x)))\,g'(h(x))\,h'(x)$$

3 関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の微分公式を導きたい．関数と逆関数は $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$ をみたすことに注目する．そこで，$f^{-1}(x) = g(x)$ とおいて $g'(x)$ を求めることを考える．

a) $f(g(x)) = x$ の両辺を合成関数の微分法を用いて微分せよ．

$(f(g(x)))' = (x)'$ より
$f'(g(x))g'(x) = 1$

b) 上で得られた式を $g'(x)$ について解け．

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

c) 逆関数の導関数 $\big(f^{-1}(x)\big)'$ を $f(x)$，$f'(x)$ を用いて表せ．

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

次の一連の問題の目的は，公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを証明することである．n が整数の場合については前回すでに $(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つことを示してある．

$\boxed{4}$ 【$a = 1/n$ の場合】$f(x) = x^n$ とすると，関数 $\sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x)$ の逆関数である．すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．

a) 問題 3 で得られた逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ．

$$(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'$ の微分公式を導け．

$$(x^{\frac{1}{n}})' = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}(x^{\frac{1}{n}})^{-(n-1)}$$

$$= \frac{1}{n}x^{\frac{-n+1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$\boxed{5}$ 【a が有理数の場合】$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ であることを用い，合成関数の微分公式を用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ の微分公式を導け．

$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $g(x) = x^m$ とおくと

$$(x^{\frac{m}{n}})' = ((x^m)^{\frac{1}{n}})' = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$= \frac{1}{n}(x^m)^{\frac{1}{n}-1} \cdot mx^{m-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-m} \cdot x^{m-1}$$

$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

$\boxed{6}$ 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = (1-2x^2)^3$

$$f'(x) = 3(1-2x^2)^2 \times (1-2x^2)'$$

$$= -12x(1-2x^2)^2$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2} = (4x+3)^{-2}$

$$f'(x) = -2(4x+3)^{-3} \cdot (4x+3)'$$

$$= -8(4x+3)^{-3}$$

$$= \frac{-8}{(4x+3)^3}$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{-3}$

$$f'(x) = -3(x^2+1)^{-4} \times (x^2+1)'$$

$$= -6x(x^2+1)^{-4}$$

$$= \frac{-6x}{(x^2+1)^4}$$

d) $f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$$f'(x) = 3\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2 \times \left(x^2-\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 3\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

f) $f(x) = \sqrt{16-x^2} = (16-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}}(16-x^2)'$$

$$= \frac{-2x}{2}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-x+1} = (x^2-x+1)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-x+1)^{-\frac{2}{3}}(x^2-x+1)'$$

$$= \frac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x^2)'$$

$$= -\frac{1}{2} \times (-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$