$\boxed{1}$ 積の微分公式を用い，関数 $f(x)g(x)^2$ の導関数 $\left(f(x)g(x)^2\right)'$ を求めよ．

$$\begin{aligned}(f(x)g(x)^2)' &= f'(x)g(x)^2 + f(x)(g(x)^2)' \\ &= f'(x)g(x)^2 + f(x)(g(x)g(x))' \\ &= f'(x)g(x)^2 + f(x)(g'(x)g(x) + g(x)g'(x)) \\ &= f'(x)g(x)^2 + 2f(x)g(x)g'(x)\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 底面の半径が r で，高さが h の直円錐がある．r，h が時間 t とともに変化するとき，この直円錐の体積 V の t に関する導関数 $\dfrac{dV}{dt}$ を $r, h, \dfrac{dr}{dt}, \dfrac{dh}{dt}$ を用いて表せ．

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) = \frac{1}{3}\pi \frac{d}{dt}(r^2 h) \\ &= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{d}{dt}(r^2)\cdot h + r^2\frac{dh}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{3}\pi\left(2rh\frac{dr}{dt} + r^2\frac{dh}{dt}\right)\end{aligned}$$

2016年6月7日

入学年度	学部	学 科		組		番 号		検	フリガナ	
									氏名	

次の一連の問題の目的は，公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ が，任意の整数 n について成り立つことを証明することである．

$\boxed{3}$ 【n が自然数の場合】任意の自然数 n について $f_n(x) = x^n$ とおく．$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい．

(I) $n = 1$ のとき．$f_1(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1{}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^1 - x^1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

したがって $n=1$ のときは成り立つ

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると，$f_k{}'(x) = kx^{k-1}$．いま，$f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから，積の微分公式を用いて，

$$\begin{aligned} f_{k+1}{}'(x) = (f_1(x)f_k(x))' &= f_1'(x)f_k(x) + f_1(x)f_k'(x) \\ &= 1 \times x^k + x \times (kx^{k-1}) \\ &= x^k + kx^k \\ &= (k+1)x^k \end{aligned}$$

したがって $n=k+1$ のときも成り立つ

(I)(II) より，すべての自然数 n について $(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つ。

$\boxed{4}$ 【n が負の整数の場合】

a) 商の微分公式を用いて $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ を求め，$(x^{-n})'$ を ax^b の形に表せ．

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{n}{x^{n+1}} = nx^{-n-1}$$

$$\therefore (x^{-n})' = nx^{-n-1}$$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)