入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏名

1 関数 $f(x) = x\sqrt{x}$ の導関数を，導関数の定義に従って求めたい．

a) $f(x+h) - f(x) = (x+h)\sqrt{x+h} - x\sqrt{x} = x\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right) + h\sqrt{x+h}$ と変形することにより $f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を計算せよ．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sqrt{x+h} - x\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{x(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h} + \frac{h\sqrt{x+h}}{h}\right)$$

$$= x\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} + \lim_{h\to 0}\sqrt{x+h}$$

$$= x\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} + \sqrt{x}$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

b) $f(x) = \sqrt{x^3}$ と書き直し，$f(x) = \sqrt{x}$ の導関数をもとめる方法をまねて $f'(x)$ を計算せよ．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^3} - \sqrt{x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{(x+h)^3} - \sqrt{x^3}\right)\left(\sqrt{(x+h)^3} + \sqrt{x^3}\right)}{h\left(\sqrt{(x+h)^3} + \sqrt{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h\left(\sqrt{(x+h)^3} + \sqrt{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})\left((x+h)^2 + (x+h)x + x^2\right)}{\cancel{h}\left(\sqrt{(x+h)^3} + \sqrt{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 + (x+h)x + x^2}{\sqrt{(x+h)^3} + \sqrt{x^3}}$$

$$= \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

2 2つの関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の積として表される関数 $y = uv$ の導関数を求めたい．

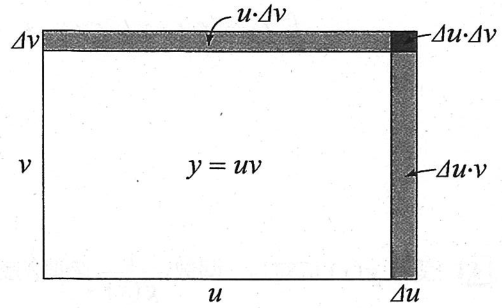
a) いま，x の増分を Δx としたとき，y の増分 Δy を u の増分 Δu と v の増分 Δv を用いて表すことを考える．x が $x + \Delta x$ に変化したとき，u は $u + \Delta u$，v は $v + \Delta v$ に変化するので，y は $(u+\Delta u)(v+\Delta v)$ に変化する．したがって，

$$\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv$$

と表せる．これを代入して展開整理すると，

$$\Delta y = \Delta u \cdot \boxed{v} + \boxed{u} \cdot \Delta v + \boxed{\Delta u \cdot \Delta v}$$

と表される．この式の両辺を Δx で割って $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ を求めよ．



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v + u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}$$

b) 上で求めた式で $\Delta x \to 0$ として $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$ を求めたい．そこで，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx},\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{d\cancel{u}\,v}{dx},\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = \frac{du}{dx}\cdot 0 = 0$$

であることを用い，$\dfrac{dy}{dx}$ を，u, $\dfrac{du}{dx}$, v, $\dfrac{dv}{dx}$ 用いて表せ．

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v + u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$= \frac{du}{dx}\cdot v + u\frac{dv}{dx} + 0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot v + u\cdot\frac{dv}{dx}$$

c) b) で求めた式を別の記号法 $\dfrac{dy}{dx} = \left(f(x)g(x)\right)'$，$\dfrac{du}{dx} = f'(x)$，$\dfrac{dv}{dx} = g'(x)$ を用いて書き直し，積の微分公式を求めよ．

$$(f(x)g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

3 $f(x)g(x)h(x) = (f(x)g(x))h(x)$ であることと積の微分公式を用いて 3 つの関数の積の導関数 $(f(x)g(x)h(x))'$ を求めよ.

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)(g(x)h(x)) + f(x)(g(x)h(x))'$$
$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)(g'(x)h(x) + g(x)h'(x))$$
$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

4 関数 $g(x)$ に対し，関数 $\dfrac{1}{g(x)}$ の導関数 $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'$ を求めたい.

a) $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ とおき，$f'(x)$ を求める．分母を払った式 $f(x)g(x) = 1$ の両辺を微分し，左辺の微分に積の微分公式を用い，$f(x)$，$f'(x)$，$g(x)$，$g'(x)$ の間に成り立つ関係式を求めよ.

$(f(x)g(x))' = (1)'$ より

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 0$$

b) a) で求めた関係式を $f'(x)$ について解き，$f'(x)$ を $f(x)$，$g(x)$，$g'(x)$ で表せ.

$$f'(x)g(x) = -f(x)g'(x)$$
$$\therefore f'(x) = \frac{-f(x)g'(x)}{g(x)}$$

c) b) において $f(x)$ を $\dfrac{1}{g(x)}$ で置き換え，$f'(x)$ を $g(x)$ と $g'(x)$ のみで表すことにより，$\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'$ を求めよ.

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-\frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)}{g(x)} = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$$

5 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ である．この右辺を積の微分公式を用いて微分し，問題 4 で求めた微分公式を用いることにより，商の微分公式 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$ を求めよ.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$
$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\,\frac{-g'(x)}{g(x)^2}$$
$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

6 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1)$

$$f'(x) = (x^2-x+1)'(x+1) + (x^2-x+1)(x+1)'$$
$$= (2x-1)(x+1) + (x^2-x+1)$$
$$= 2x^2+x-1+x^2-x+1$$
$$= 3x^2$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

$$f'(x) = -\frac{(3x-2)'}{(3x-2)^2} = -\frac{3}{(3x-2)^2}$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{6x^3}$

$$f'(x) = \frac{1}{6}\cdot\frac{-(x^3)'}{(x^3)^2}$$
$$= \frac{1}{\cancel{6}_{2}}\,\frac{-\cancel{3}x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{6}\,4}}$$
$$= -\frac{1}{2x^4}$$

d) $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2+5}$

$$f'(x) = \frac{(x-5)'(x^2+5) - (x-5)(x^2+5)'}{(x^2+5)^2}$$
$$= \frac{x^2+5-(x-5)\times 2x}{(x^2+5)^2}$$
$$= \frac{-x^2+10x+5}{(x^2+5)^2}$$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2-x+1) - x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2-x+1-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$
$$= \frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)