2016 年 1 月 19 日

微分積分 I　期末試験	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏　　　名
火曜 2 限 担当: 鍬田 政人							

● 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に書くこと．そうでない場合は大きく減点する．

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^2}$ とする．

a) x が 1 から $1+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ．

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(1-2(1+h))^2} - 1\right) = \frac{1}{h}\cdot\frac{1-(-1-2h)^2}{(-1-2h)^2}$$

$$= \frac{1}{h}\cdot\frac{1-(1+4h+4h^2)}{(1+2h)^2} = \frac{1}{h}\cdot\frac{-4h-4h^2}{(1+2h)^2}$$

$$= \frac{-4-4h}{(1+2h)^2} \quad //$$

b) $f(x)$ の $x=1$ における微分係数を極限を用いた定義を用いて直接計算せよ．

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-4-4h}{(1+2h)^2}$$

$$= -4 \quad //$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \dfrac{-4x+5}{2x-3}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) $y=f(x)$ のグラフは $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線である．k，p，q は何かを答えよ．

$$\frac{-4x+5}{2x-3} = -2 + \frac{-1}{2x-3} = -2 + \frac{-\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}}$$

$\therefore\ k = -\frac{1}{2},\ p = \frac{3}{2},\ q = -2$

b) $y=f(x)$ のグラフの $(2,-3)$ における接線の方程式を求めよ．

$$f'(x) = \left(-2 + \frac{-1}{2x-3}\right)' = \left(-(2x-3)^{-1}\right)'$$

$$= (2x-3)^{-2}\times(2x-3)'$$

$$= \frac{2}{(2x-3)^2}$$

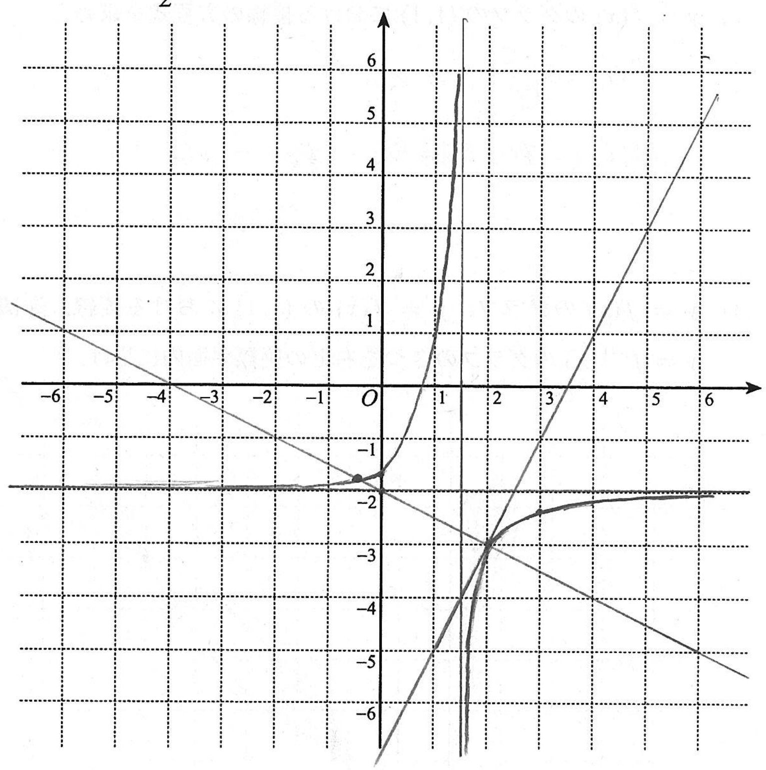
$f'(2) = 2$

$(2,-3)$ における接線

$y-(-3) = 2(x-2)$

$y = 2x-7$

c) $y=f(x)$ のグラフ，$y=f(x)$ の $(2,-3)$ における接線，および直線 $y=-\dfrac{1}{2}x-2$ を下の座標平面内に描け．



d) グラフを利用して不等式 $\dfrac{-4x+5}{2x-3} \geqq -\dfrac{1}{2}x-2$ を解け．

$\dfrac{-4x+5}{2x-3} = -\dfrac{1}{2}x-2 \Rightarrow x^2-\dfrac{3}{2}x+1=0$

$\Rightarrow (2x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ グラフの交点の x 座標は $x=-\frac{1}{2},\ 2$

不等式の解はグラフより　$-\frac{1}{2} \leqq x < \frac{3}{2},\ x \geqq 2$

$\boxed{3}$ $f(x) = \sqrt{4x-3}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y=f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

定義域：$4x-3 \geqq 0 \iff x \geqq \frac{3}{4}$

値域：$y \geqq 0$

b) $y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を述べよ．

$y=\sqrt{4x-3} \Rightarrow x = \frac{1}{4}y^2+\frac{3}{4}$

ここで x と y を入れ換え　$y=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$

$\therefore\ f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$

定義域：$x \geqq 0$

値域：$y \geqq \frac{3}{4}$

c) $y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフの交点を求めよ．

$y=f(x)$ と $y=x$ の交点は $y=f^{-1}(x)$ も通るからこれを求めると

$\sqrt{4x-3} = x \Rightarrow x^2-4x+3=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1,3$

$(1,1),(3,3)$ は確かに交点．

その他の交点があるかを調べると $\sqrt{4x-3} = \frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$

より $x^4+6x^2-64x+57=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)(x^2+4x+19)=0$

【裏面につづく】

よってこの他に実数解はない。　$\therefore (1,1),(3,3)$ //

d) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = \left(\sqrt{4x-3}\right)' = \left((4x-3)^{\frac{1}{2}}\right)'$$
$$= \frac{1}{2}(4x-3)^{-\frac{1}{2}} \times (4x-3)'$$
$$= \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$$

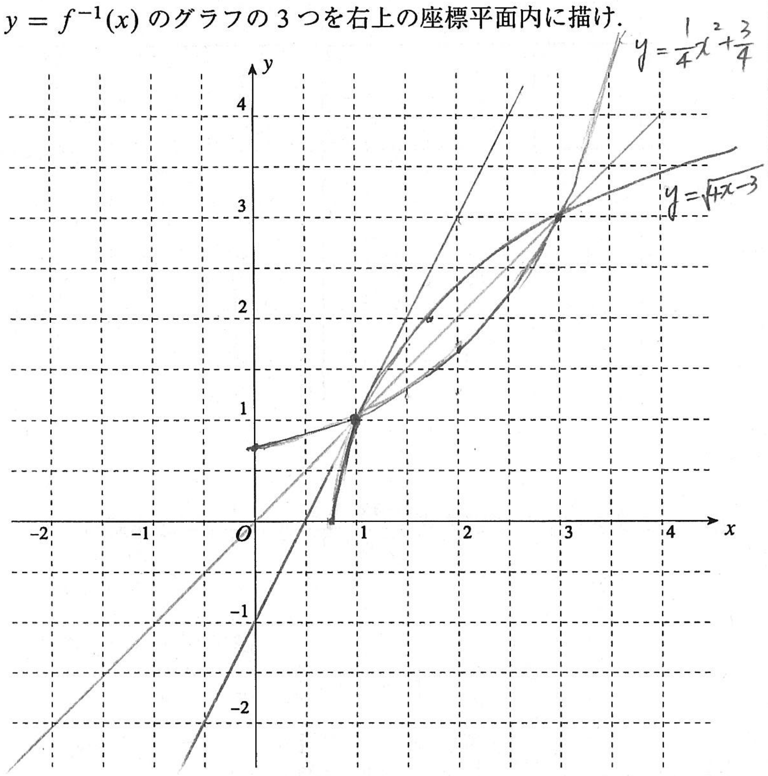
e) $y = f(x)$ のグラフの $(1,1)$ における接線の方程式を求めよ．

$$f'(1) = \frac{2}{\sqrt{4-3}} = 2.$$

$(1,1)$ における接線　$y-1 = 2(x-1)$

$$y = 2x - 1$$

f) $y = f(x)$ のグラフ，$y = f(x)$ の $(1,1)$ における接線，逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを右上の座標平面内に描け．



4 $f(x) = \dfrac{(3x+1)}{2}\sqrt{4-x^2}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を求めよ．

根号内 $\geqq 0$ より　$4 - x^2 \geqq 0$

$$-2 \leqq x \leqq 2$$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = \left(\frac{3x+1}{2}\right)'\sqrt{4-x^2} + \frac{3x+1}{2}\left(\sqrt{4-x^2}\right)'$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{3x+1}{2} \times \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x)$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{3(4-x^2) - (3x+1)x}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{-6x^2 - x + 12}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(2x+3)(3x-4)}{\sqrt{4-x^2}}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f'(x) = 0 \iff (2x+3)(3x-4) = 0 \iff x = -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$$
$$f'(x) > 0 \iff (2x+3)(3x-4) < 0$$
$$\iff -\frac{3}{2} < x < \frac{4}{3}$$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ．

x	-2		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{4}$		2
$f'(x)$	╳	$-$	0	$+$	0	$-$	╳
$f(x)$	0	↘	最小	↗	最大	↘	0

e) $f(x)$ が定義される範囲内での最大値・最小値を求めよ．

$x = -\frac{3}{2}$ のとき最小値　$-\frac{7\sqrt{7}}{8}$

$x = \frac{3}{4}$ のとき 最大値　$\frac{17\sqrt{57}}{32}$

5 次の各々の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+2}$

$$f'(x) = \frac{(x-2)'(x^2+2) - (x-2)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{x^2+2-(x-2)\times 2x}{(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{-x^2+4x+2}{(x^2+2)^2}$$

b) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

$$f'(x) = e^{\sqrt{2x+1}} \times \left(\sqrt{2x+1}\right)'$$
$$= e^{\sqrt{2x+1}} \times \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,e^{\sqrt{2x+1}}$$

c) $f(x) = \sqrt[3]{1-3x^2}$

$$f'(x) = \left((1-3x^2)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(1-3x^2)^{-\frac{2}{3}} \times (1-3x^2)'$$
$$= \frac{-2x}{\left(\sqrt[3]{1-3x^2}\right)^2}$$

d) $f(x) = \log\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} \times \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{\cancel{x+1}}{x-1} \times \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^{\cancel{2}}}$$
$$= \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

微分積分 I　期末試験	入学年度		学部	学科		組		番号			検	氏名
火曜2限 担当: 鍬田 政人												

$\boxed{6}$ $f(x) = (x-3)e^{x-1}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

定義域は実数全体

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = (x-3)'e^{x-1} + (x-3)(e^{x-1})'$$
$$= e^{x-1} + (x-3)e^{x-1}$$
$$= (x-2)e^{x-1}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$e^{x-1} > 0$ だから

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

d) $f(x)$ の2次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$$f''(x) = (x-2)'e^{x-1} + (x-2)(e^{x-1})'$$
$$= e^{x-1} + (x-2)e^{x-1}$$
$$= (x-1)e^{x-1}$$

e) $f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x>1$

f) $f(x)$ の増減表を完成させよ．（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること．）

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	-2	↘	$-e$	↗
		変曲点		極小	

g) $e = 2.718$, ~~$e^{-1} = 1.104$~~ として $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ を求めよ．ただし，答えは小数第3位を四捨五入して小数第2位まで求めること．

$f(-2) = -5e^{-3} = -0.249$

$f(-1) = -4e^{-2} = -0.541$

$f(0) = -3e^{-1} = -1.04$

$f(1) = -2e^{0} = -2$

$f(2) = -e = -2.718$

$f(3) = 0$

h) $f(x)$ が極大・極小となる x の値を求めよ．

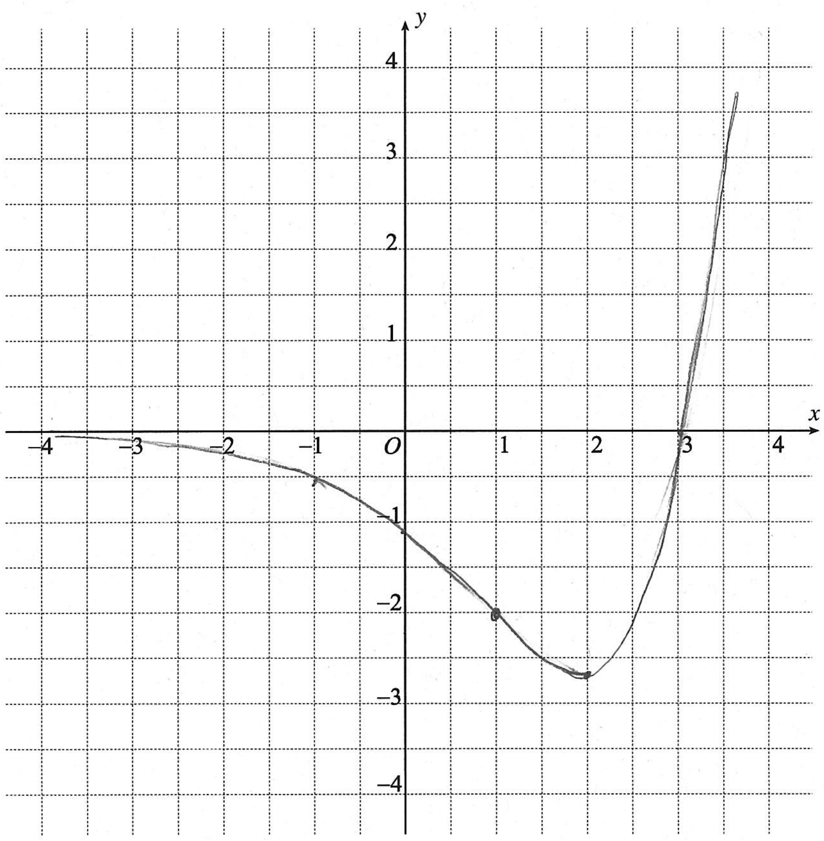
$x=2$ のとき 極小

極大となる点はない

i) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

$x=1$ のとき変曲点

j) ここまでの結果を反映させ，$y = f(x)$ のグラフをなるべく丁寧に描け．



【解答用紙が足らなければこの部分も使用して下さい】