| 入学年度 | 学部 | 学科 | 組 | 番号 | 検 | フリガナ / 氏名 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

1 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ とする．

a) $f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$ をそれぞれ求めよ．

$\frac{9}{4}, -\frac{8}{3}, -\frac{13}{12}, 0\ -\frac{5}{12}, \frac{8}{3}, \frac{81}{4}$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$f'(x) = x^3 + x^2 - 2x$

$f''(x) = 3x^2 + 2x - 2$

c) $f'(x) = 0$ となる $x$ と，$f'(x) > 0$ となる $x$ の範囲を求めよ．

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0, 1, -2$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0,\ x > 1$

d) $f''(x) = 0$ となる $x$ と，$f''(x) > 0$ となる $x$ の範囲を求めよ．

$f''(x) = 3x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{-1-\sqrt{7}}{3},\ x > \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$

e) $f(x)$ の増減表を完成させよ．（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること．）

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$ ($\fallingdotseq -1.22$) | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$ ($\fallingdotseq 0.54$) | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-\frac{8}{3}$ | ↗ | | ↗ | $0$ | ↘ | | ↘ | $-\frac{5}{12}$ | ↗ |
| | | 極小 | | 変曲点 | | 極大 | | 変曲点 | | 極小 | |

$\frac{-71-20\sqrt{7}}{81} \fallingdotseq -1.53$　　$\frac{-71+20\sqrt{7}}{81} \fallingdotseq 0.22$

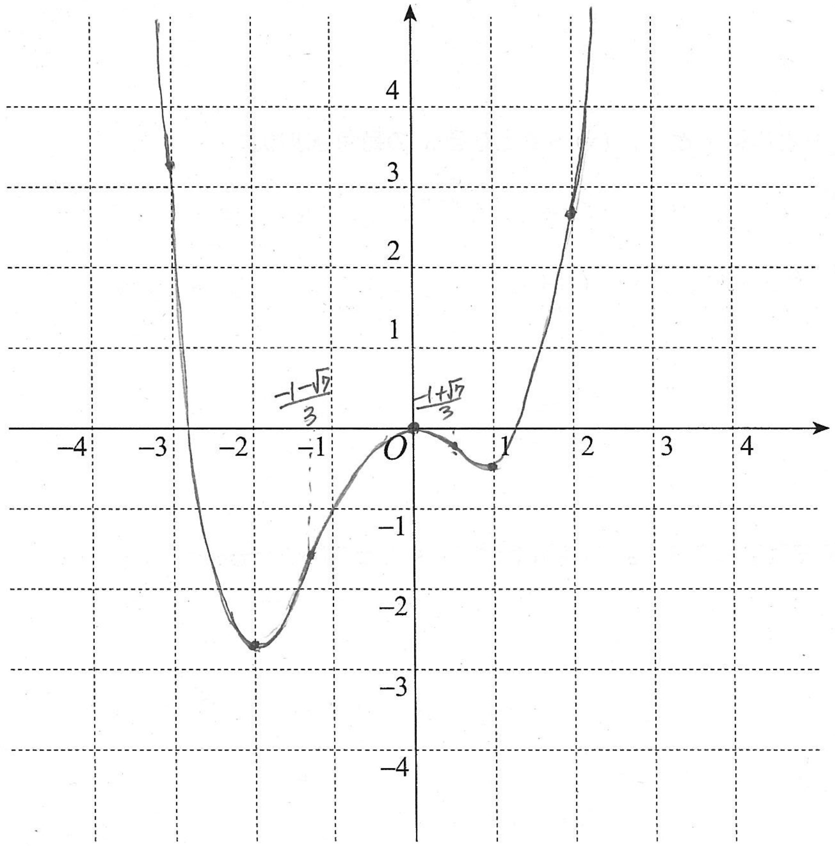
f) $f(x)$ が極大・極小となる $x$ の値を求めよ．また，$f(x)$ の極大値および極小値を小数で表せ．ただし，答えは小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めること．

$x = 0$ のとき極大で，極大値 $0$

$x = -2$ のとき と $x = 1$ のとき極小で，極小値はそれぞれ

$-\frac{8}{3} \fallingdotseq 2.67,\ -\frac{5}{12} \fallingdotseq -0.42$

g) $y = f(x)$ のグラフを，ここまでの結果を反映させて，なるべく丁寧に描け．



$\boxed{2}$ $f(x) = (x-1)e^{x+1}$ とする．

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = (x-1)'e^{x+1} + (x-1)(e^{x+1})' = e^{x+1} + (x-1)e^{x+1}$$
$$= xe^{x+1}$$

$$f''(x) = (x)'e^{x+1} + x(e^{x+1})' = e^{x+1} + xe^{x+1}$$
$$= (1+x)e^{x+1}$$

b) $f'(x) = 0$ となる $x$ と，$f'(x) > 0$ となる $x$ の範囲を求めよ．

$$f'(x) = 0 \iff xe^{x+1} = 0 \iff x = 0$$
$$f'(x) = 0 \iff xe^{x+1} > 0 \iff x > 0 \quad (e^{x+1} > 0 \text{だから})$$

c) $f''(x) = 0$ となる $x$ と，$f''(x) > 0$ となる $x$ の範囲を求めよ．

$$f''(x) = 0 \iff (1+x)e^{x+1} = 0 \iff x = -1$$
$$f''(x) > 0 \iff (1+x)e^{x+1} > 0 \iff 1+x > 0 \iff x > -1$$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ．（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること．）

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-2$ | ↘ | $-e$ | ↗ |

e) $f(x)$ が極大・極小となる点，および変曲点を求めよ．

$x=0$ のとき極小．極大となる点はなし．

$x=-1$ を境いに $f''(x)$ の符号が変わるので，$(-1,-2)$ が変曲点．

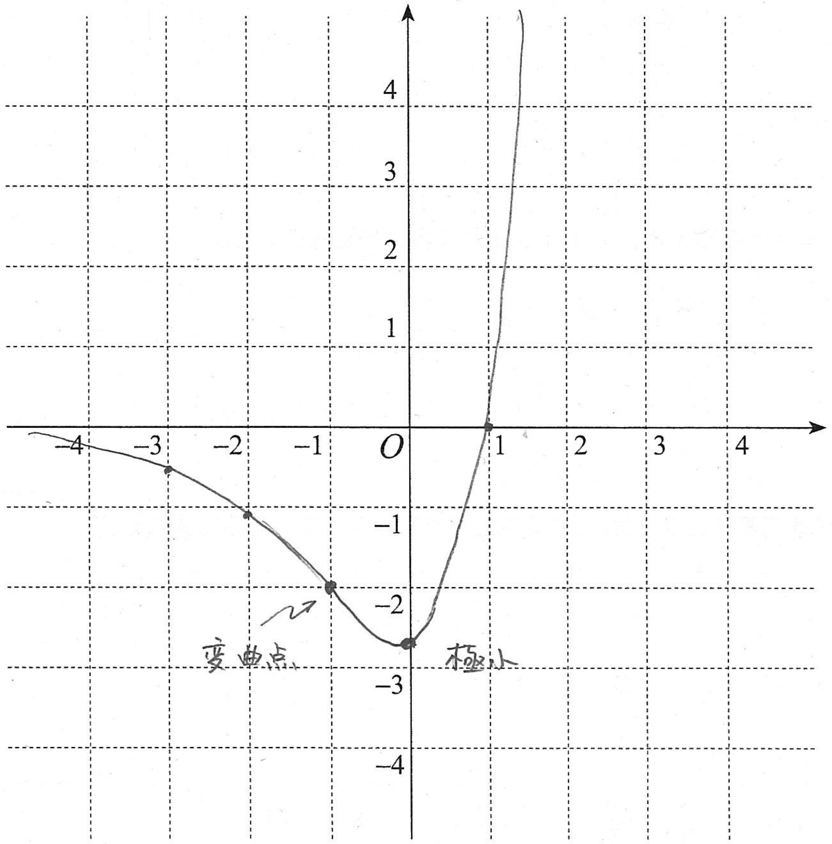
f) $e \fallingdotseq 2.718$，$e^{-1} \fallingdotseq 0.368$，$e^{-2} \fallingdotseq 0.135$ であるとして，$f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ の値を概算せよ．

$f(-3) = -4e^{-2} \fallingdotseq -0.54$，$f(-2) = -3e^{-1} \fallingdotseq -1.10$

$f(-1) = -2$，$f(0) = -e \fallingdotseq -2.72$，$f(1) = 0$，

$f(2) = e^3 \fallingdotseq 20.1$

g) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ であることが知られている．これと，ここまでの結果を用いて，$f(x)$ のグラフを描け．




担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)