入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1 $f(x) = xe^{-x}$ とする.

a) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$f'(x) = (xe^{-x})' = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})'$

$= e^{-x} + x\,e^{-x}(-x)'$

$= (1-x)\,e^{-x}$

b) 微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

$f'(0) = (1-0)\,e^{-0} = 1$

c) 曲線 $y = xe^{-x}$ の原点 $(0, 0)$ における接線の方程式を求めよ.

接線は $(0,0)$ を通り, 傾き $f'(0)=1$ の直線.

その方程式は $y=x$

d) 関数 $f(x) = xe^{-x}$ の増減を調べ, 増減表を完成させよ.

$f'(x) > 0 \iff 1-x > 0$

$\iff x < 1$

x	⋯	1	⋯
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	e^{-1}	↘

2 $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ とする.

a) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ.

$f(x)$ は根号内が負でなければ定義される.

$4-x^2 \geqq 0 \iff -2 \leqq x \leqq 2$

定義域 : $-2 \leqq x \leqq 2$

b) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$f'(x) = (x(4-x^2)^{\frac{1}{2}})' = (x)'(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + x((4-x^2)^{\frac{1}{2}})'$

$= \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4-x^2)'$

$= \sqrt{4-x^2} + \dfrac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

c) $f'(x) = 0$ となる x と, $f'(x) > 0$ となる範囲を求めよ.

$f'(x) = 0 \iff 2-x^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

$f'(x) > 0 \iff \dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} > 0 \iff 2-x^2 > 0 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

d) $f(x)$ が定義域内での増減表を書け.

x	-2	⋯	$-\sqrt{2}$	⋯	$\sqrt{2}$	⋯	2
$f'(x)$	×	−	0	+	0	−	×
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

e) $f(x)$ の定義域内での最大値, 最小値を求めよ.

最大値 2 $(x=\sqrt{2})$

最小値 -2 $(x=-\sqrt{2})$

3 直円柱の形をした缶詰の容器の容積が V で一定であるとき，その表面積 S を最小にしたい.

a) 底面の半径を r，高さ h とするとき，S と V をそれぞれ r と h で表せ.

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$V = \pi r^2 h$$

b) S を V と r で表せ.

$V = \pi r^2 h$ より　$h = \frac{V}{\pi r^2}$

これを S の式に代入し　$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$

c) S を r の関数とみて，$\frac{dS}{dr}$ を計算し，S の増減表を書け.

$$\frac{dS}{dr} = \frac{d}{dr}\left(2\pi r^2 + \frac{2V}{r}\right) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^3}$$

$\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

$r > 0$ だから 増減表は

右のとおり

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	
$\frac{dS}{dr}$	×	$-$	0	$+$
S		↘	最小	↗

d) S が最小になるときの r の値を求めよ．また，そのときの h の値も求めよ.

増減表より $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ のとき S は最小となる

このとき $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi}\left(\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = \frac{V^{\frac{1}{3}}}{2^{-\frac{2}{3}}\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \quad \left(= 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$

半径: $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，高さ $\sqrt[3]{\frac{4V}{2\pi}}$

4 次の関数の第 2 次導関数を求めよ.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1 + \frac{-2}{x+1} = 1 - 2(x+1)^{-1}$

$f'(x) = +2(x+1)^{-2}(x+1)' = 2(x+1)^{-2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

$f''(x) = -2\cdot 2(x+1)^{-3}(x+1)' = -4(x+1)^{-3}$

$= \frac{-4}{(x+1)^3}$

b) $f(x) = xe^{-2x}$

$f'(x) = (xe^{-2x})' = (x)'e^{-2x} + x(e^{-2x})' = e^{-2x} + xe^{-2x}(-2x)'$

$= (1-2x)e^{-2x}$

$f''(x) = (1-2x)'e^{-2x} + (1-2x)(e^{-2x})'$

$= -2e^{-2x} + (1-2x)e^{-2x}\times(-2)$

$= -2(1+(1-2x))e^{-2x}$

$= -4(1-x)e^{-x}$

c) $f(x) = \log(x^2+1)$

$f'(x) = (\log(x^2+1))' = \frac{1}{x^2+1}\times(x^2+1)' = \frac{2x}{1+x^2}$

$f''(x) = \frac{(2x)'(1+x^2) - 2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$

$= \frac{2(1+x^2) - 2x\times(2x)}{(1+x^2)^2}$

$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)