| 入学年度 | 学部 | 学科 | 組 | 番号 | 検 | フリガナ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 氏名 |

1 次の表は，あるクラスの英語のテストの成績である．

| 点数 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 人数 | 1 | 0 | 2 | 9 | 12 | 6 | 5 | 3 | 2 | 40 |

このクラスから１人の生徒を選び，その生徒の点数を $X$ とする．

a) 確率変数 $X$ の確率分布を求めよ．

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{40}$ | 0 | $\frac{2}{40}$ | $\frac{9}{40}$ | $\frac{12}{42}$ | $\frac{6}{40}$ | $\frac{5}{40}$ | $\frac{3}{40}$ | $\frac{2}{40}$ | 1 |

b) 確率変数 $X$ の平均 $\mu = E(X)$ と標準偏差 $\sigma = \sqrt{V(X)}$ を求めよ．

$$E(X) = \frac{1}{40}(2\times1 + 3\times0 + 4\times2 + 5\times9 + 6\times12 + 7\times6 + 8\times5 + 9\times3 + 10\times2)$$

$$= \frac{256}{40} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$E(X^2) = \frac{1}{40}(4\times1 + 9\times0 + 16\times2 + 25\times9 + 36\times12 + 49\times6 + 64\times5 + 81\times3 + 100\times2)$$

$$= \frac{1750}{40} = \frac{175}{4}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{175}{4} - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = \frac{279}{100} = 2.79$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.79} = 1.67$$

c) $P(|X-\mu| \leqq \sigma)$，$P(|X-\mu| \leqq 2\sigma)$，$P(|X-\mu| \leqq 3\sigma)$ を求めよ．

$$|X-\mu| \leqq \sigma \iff \mu-\sigma \leqq X \leqq \mu+\sigma$$

$$P(|X-\mu| \leqq \sigma) = P(6.4-1.67 \leqq X \leqq 6.4+1.67) = P(4.73 \leqq X \leqq 8.07)$$

$$= P(X=5,6,7,8) = \frac{1}{40}(9+12+6+5) = 0.8$$

$$P(|X-\mu| \leqq 2\sigma) = P(3.06 \leqq X \leqq 9.74) = \frac{1}{40}(2+9+12+6+5+3)$$

$$= \frac{37}{40} = 0.925$$

$$P(|X-\mu| \leqq 3\sigma) = P(1.39 \leqq X \leqq 11.41) = P(X=2,3,\cdots,10) = 1.$$

2 確率変数 $X$ のとる値が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ であり，値 $x_k$ をとる確率が $p_k$ であるとする．このとき，期待値 $E(X)$ は $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ で定義されるのであった．

a) $a, b$ を定数とするとき，$aX+b$ は $ax_1+b, ax_2+b, \ldots, ax_k+b$ という値をとる確率変数である．$aX+b$ の期待値 $E(aX+b)$ を求めよ．

$$E(aX+b) = \sum_{k=1}^{n}(ax_k+b)p_k = \sum_{k=1}^{n}(ax_kp_k + bp_k)$$

$$= a\sum_{k=1}^{n}x_kp_k + b\sum_{k=1}^{n}p_k$$

$$= aE(X)+b \quad \left(\because \sum_{k=1}^{n}x_kp_k = E(X),\ \sum_{k=1}^{n}p_k = 1\right)$$

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

b) 確率変数 $X$ の分散 $V(X)$ について $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ が成り立つことと，a) の結果を用い，$V(aX+b)$ を求めよ．

$$V(aX+b) = E((aX+b)^2) - E(aX+b)^2$$

$$= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X)+b)^2$$

$$= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - (a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2)$$

$$= a^2(E(X^2) - E(X)^2)$$

$$= a^2V(X)$$

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

3 1枚の硬貨を続けて5回投げるとき，表の出る回数を $X$ とする．

a) 確率変数 $X$ の確率分布を求めよ．

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | 1 |

b) 確率変数 $X$ の期待値と標準偏差を求めよ．

$$E(X)=\frac{1}{32}(0\times 1+1\times 5+2\times 10+3\times 10+4\times 5+5\times 1)$$
$$=\frac{80}{32}=\frac{5}{2}=2.5$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$
$$=\frac{1}{32}(0\times 1+1\times 5+4\times 10+9\times 10+16\times 5+25\times 1)-\left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$=\frac{280}{32}-\frac{25}{4}=\frac{35}{4}-\frac{25}{4}=\frac{5}{4}=1.25$$
$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\fallingdotseq 1.12$$

$\mu=\frac{5}{2}=2.5,\ \sigma=\frac{\sqrt{5}}{2}=1.12$

c) 数直線上に針を立て，硬貨を投げて，表が出たら針を正の方向に1だけ動かし，裏が出たら針を負の方向に1だけ動かす．最初に針を原点に立てておき，硬貨を5回投げた後の針の座標を $Y$ とする．$Y$ を $X$ を用いて表し，$Y$ の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

$X$ 回表が出たとすると，$(5-X)$ 回は裏が出たということなので，

このとき針は正の方向に $X$，負の方向に $(5-X)$ だけ動く

ゆえに

$$Y=1\times X+(-1)(5-X)$$
$$=2X-5$$

と表される

$$E(Y)=E(2X-5)=2E(X)-5=2\times\frac{5}{2}-5=0$$
$$V(Y)=V(2X-5)=2^2V(X)=4\times\frac{5}{4}=5$$
$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{5}$$

$\mu=0,\ \sigma^2=5,\ \sigma=\sqrt{5}$

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)