入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏 名

$\boxed{1}$ さいころを 2 回続けて投げるとき，最初に出た目の数を X_1，2回目に出た目の数を X_2 とし，X をその和とする．すなわち，$X = X_1 + X_2$ とする．

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

b) $E(X)$ を求めよ．

$$E(X) = \frac{1}{36}(2\times1 + 3\times2 + 4\times3 + 5\times4 + 6\times5 + 7\times6 + 8\times5 + 9\times4 + 10\times3 + 11\times2 + 12\times1)$$

$$= \frac{252}{36} = 7$$

$\underline{E(X) = 7}$

c) 確率変数 X の分散 $V(X)$ を定義にしたがって求めよ．

$$V(X) = \frac{1}{36}\left((2-7)^2\times1 + (3-7)^2\times2 + (4-7)^2\times3 + (5-7)^2\times4 + (6-7)^2\times5 + (7-7)^2\times6 + (8-7)^2\times5 + (9-7)^2\times4 + (10-7)^2\times3 + (11-7)^2\times2 + (12-7)^2\times1\right)$$

$$= \frac{1}{36}(25\times1 + 16\times2 + 9\times3 + 4\times4 + 1\times5 + 1\times5 + 4\times4 + 9\times3 + 16\times2 + 25\times1)$$

$$= \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$$

$\boxed{2}$ さいころを 2 回続けて投げるとき，最初に出た目の数を X_1，2回目に出た目の数を X_2 とし，X をその積とする．すなわち，$X = X_1X_2$ とする．

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

a) 確率変数 X の確率分布を求めよ．

X	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

b) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

$$E(X) = \frac{1}{36}(1 + 4 + 6 + 12 + 10 + 24 + 16 + 9 + 20 + 48 + 30 + 16 + 36 + 40 + 48 + 25 + 60 + 36)$$

$$= \frac{1}{36}\times441 = \frac{49}{4}$$

c) $E(X) = E(X_1)E(X_2)$ であることを確かめよ．

$E(X_1) = E(X_2) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$ だから

$$E(X_1)E(X_2) = \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2} = \frac{49}{4} = E(X)$$

【裏に続く】

3 独立な確率変数 X と Y について，$E(XY) = E(X)E(Y)$ が成り立つ．この性質と，分散と期待値の関係式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用い，独立な確率変数 X と Y について，$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ が成り立つことを証明せよ．

$$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2$$
$$= E(X^2+2XY+Y^2) - (E(X)+E(Y))^2$$
$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$$

ここで $E(XY) = E(X)E(Y)$ を用いると

$$V(X+Y) = E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2$$
$$= V(X) + V(Y)$$

4 確率変数 X の期待値が -3 で分散が 5，確率変数 Y の期待値が 2 で分散が 4 であり，X と Y が互いに独立であるとする．このとき，確率変数 $Z = X + Y$ の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

$E(X) = -3,\quad V(X) = 5$
$E(Y) = 2,\quad V(Y) = 4$

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = -3+2 = -1$$

また，X, Y は独立だから

$$V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 5+4 = 9$$
$$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = 3$$

5 a) さいころを 1 回投げるとき，1 の目が出ると $X = 1$，それ以外の目が出ると $X = 0$ とする．確率変数 X の期待値と分散を求めよ．

X	1	0	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1^2 \times \frac{1}{6} + 0^2 \times \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$
$$= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}$$

$E(X) = \frac{1}{6},\ V(X) = \frac{5}{36}$

b) 1 個のサイコロを続けて 5 回投げるとき，1 の目の出る回数を Y とする．このとき，第 k 回目に 1 の目が出ると 1，それ以外の目が出ると 0 となる確率変数を X_k とすると，各 X_k は a) と同じ分布にしたがい，$X_1, \ldots, X_5$ は互いに独立であって，$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ と表せる．これを用いて，確率変数 Y の期待値，分散と標準偏差を求めよ．

$$E(Y) = E(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)$$
$$= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5)$$
$$= 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$
$$V(Y) = V(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)$$
$$= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) + V(X_5)$$
$$= 5 \times \frac{5}{36} = \frac{25}{36}$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$