

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
						氏名	

● 積の微分公式

2つの関数  $u = f(x)$  と  $v = g(x)$  の積として表される関数  $y = uv$  の導関数を求めたい.  $x, y, u, v$  の増分をそれぞれ  $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$  で表す.

いま,  $x$  を  $x + \Delta x$  に変化させたとき,  $\Delta y$  を  $\Delta u$  と  $\Delta v$  を用いて表すことを考える.

$x$  が  $x + \Delta x$  に変化したとき

$$u \rightarrow u + \Delta u, \quad v \rightarrow v + \Delta v$$

と変化するので,

$$y = uv \rightarrow (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

と変化する. したがって,  $y$  の増分は

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

と表せる. これを展開整理すると,

$$\Delta y = \Delta u \cdot \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} \cdot \Delta v + \boxed{\phantom{00}}$$

と表される. この式の両辺を  $\Delta x$  で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\phantom{00}} \cdot v + u \cdot \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

この式で  $\Delta x \rightarrow 0$  として  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$  を求めたい. まず, 導関数の定義より,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

である. また,  $\Delta x \rightarrow 0$  のとき  $\Delta v \rightarrow 0$  となるので,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = \frac{du}{dx} \cdot 0 = 0.$$

が成り立つ. したがって,

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\phantom{00}} \cdot \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} \cdot \boxed{\phantom{00}}$$

この式を別の記号法  $\frac{dy}{dx} = (f(x)g(x))'$ ,  $\frac{du}{dx} = f'(x)$ ,  $\frac{dv}{dx} = g'(x)$  を用いて書き直すと, 次の積の微分公式が得られる.

$$(f(x)g(x))' =$$

● 商の微分公式

次に, 2つの関数  $u = f(x)$  と  $v = g(x)$  の商として表される関数  $y = \frac{u}{v}$  の導関数を求めたい. 前と同様に,  $x, y, u, v$  の増分をそれぞれ  $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$  で表し,  $x$  を  $x + \Delta x$  に変化させたとき,  $\Delta y$  を  $\Delta u$  と  $\Delta v$  を用いて表すことを考える.

前の場合と同様に,  $x$  が  $x + \Delta x$  に変化したとき,  $u \rightarrow u + \Delta u$ ,  $v \rightarrow v + \Delta v$  と変化するので,

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

と変化する. したがって,  $y$  の増分は

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

と表せる. これを通分し, 整理すると,

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot \boxed{\phantom{00}} - \boxed{\phantom{00}} \cdot \Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

と表される. この式の両辺を  $\Delta x$  で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\Delta x} \cdot \frac{1}{(v + \Delta v)v}$$

と表される. この式で  $\Delta x \rightarrow 0$  として  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$  を求めたい. まず,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

であり,  $\Delta x \rightarrow 0$  のとき  $\Delta v \rightarrow 0$  となるので,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)v = v^2$  が成り立つ. したがって,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boxed{\phantom{00}} \cdot \boxed{\phantom{00}} - \boxed{\phantom{00}} \cdot \boxed{\phantom{00}}}{v^2}$$

この式を別の記号法  $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ ,  $\frac{du}{dx} = f'(x)$ ,  $\frac{dv}{dx} = g'(x)$  を用いて書き直すと, 次の商の微分公式が得られる.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$$

1  $f(x)g(x)h(x) = (f(x)g(x))h(x)$  であることと積の微分公式を用いて 3 つの関数の積の導関数  $(f(x)g(x)h(x))'$  を求めよ.

3 積の微分公式を用い, 関数  $f(x)g(x)^2$  の導関数  $(f(x)g(x)^2)'$  を求めよ.

2 次の関数を変数  $x$  で微分せよ.

a)  $f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1)$

$f'(x) =$

b)  $f(x) = \frac{1}{3x - 2}$

$f'(x) =$

c)  $f(x) = \frac{1}{6x^3}$

$f'(x) =$

d)  $f(x) = \frac{x - 5}{x^2 + 5}$

$f'(x) =$

e)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$f'(x) =$

f)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$

$f'(x) =$

4 底面の半径が  $r$  で, 高さが  $h$  の直円錐がある.  $r, h$  が時間  $t$  とともに変化するとき, この直円錐の体積  $V$  の  $t$  に関する導関数  $\frac{dV}{dt}$  を  $r, h, \frac{dr}{dt}, \frac{dh}{dt}$  を用いて表せ.