~~2016~~ 2017年1月20日

基礎数学 A2	入学年度	学部	学科	組	番号	検	氏名
金曜2限 担当: 鍬田 政人							

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{x-5}{x-3}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) $y = f(x)$ のグラフは $y = \dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線である．k，p，q は何かを答えよ．

$$y = \frac{x-5}{x-3} \iff y = 1 + \frac{-2}{x-3}$$

$$x-3 \overline{)\,x-5\,} \quad \text{商 } 1,\quad x-3,\quad -2$$

$$\iff y - 1 = \frac{-2}{x-3}$$

$k=-2,\quad p=3 \quad q=1$

b) $x=1$ における $f(x)$ の微分係数 $f'(1)$ を極限を直接計算することによって求めよ．

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+h-5}{1+h-3} - \frac{1-5}{1-3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-4+h}{-2+h} - 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{-4}+h \cancel{+4}-2h}{h(-2+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(-2+h)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

c) $y = f(x)$ のグラフの $(1,2)$ における接線の方程式を求めよ．

接線は $(1,2)$ を通る 傾き $f'(1) = \frac{1}{2}$ の直線

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

d) $y = f(x)$ のグラフ，$y = f(x)$ の $(1,2)$ における接線，および直線 $y = -2x+7$ を右上の座標平面内に描け．

e) グラフを利用して不等式 $\dfrac{x-5}{x-3} \geqq -2x+7$ を解け．

$y = \dfrac{x-5}{x-3}$ と $y = -2x+7$ の交点は

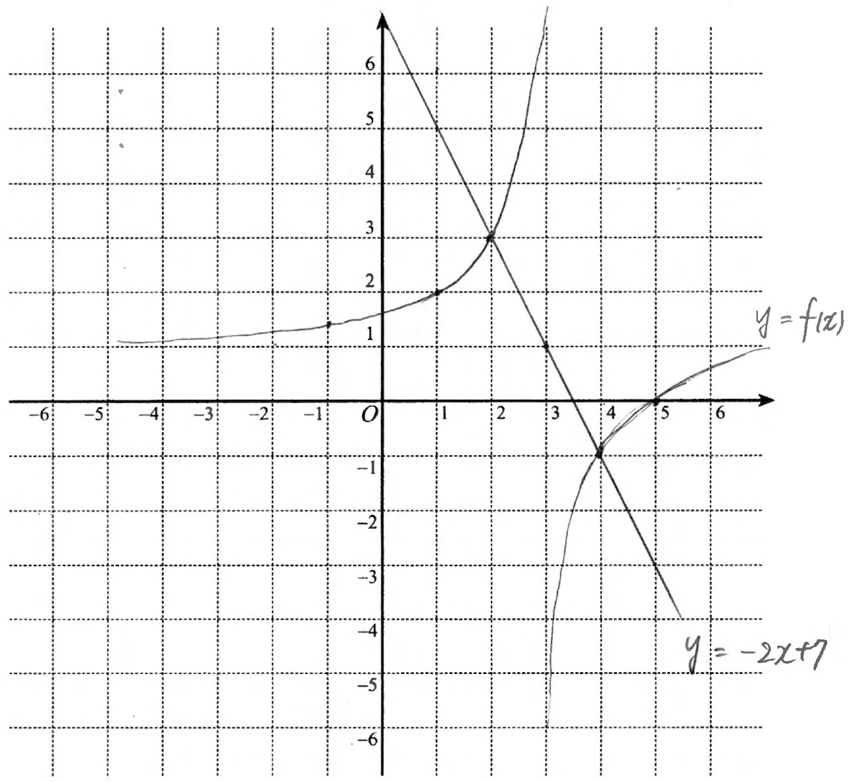
$$\frac{x-5}{x-3} = -2x+7 \Rightarrow x-5 = (x-3)(-2x+7)$$

$$\iff 2x^2 - 12x + 16 = 0$$

$$\iff (x-2)(x-4) = 0$$

$$\iff x = 2, 4$$

グラフより $\dfrac{x-5}{x-3} \geqq -2x+7$ の解は $2 \leqq x < 3,\ x \geqq 4$



$\boxed{2}$ $f(x) = x - \sqrt{4-x^2}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を求めよ．

根号内 $\geqq 0$ より $-2 \leqq x \leqq 2$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (4-x^2)'$$

$$= 1 + x(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f'(x) = 0 \iff \sqrt{4-x^2} + x = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = x^2$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$x = +\sqrt{2}$ は不可

$\therefore x = -\sqrt{2}$

$$f'(x) > 0 \iff \sqrt{4-x^2} + x > 0$$

$$\iff \sqrt{4-x^2} > -x$$

$x>0$ のとき成立　$x<0$ のとき $4-x^2 > x^2$ より

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$\therefore -\sqrt{2} < x < 2$

d) $f(x)$ の増減表を書け．

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$	×
$f(x)$	-2	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	2

e) 関数 $f(x)$ の定義域内における最小値・最大値を求めよ．

最小値 $-2\sqrt{2}$ $(x = -\sqrt{2})$

最大値 2 $(x = 2$

【裏面につづく】

$\boxed{3}$ $f(x) = -\sqrt{-2x+6}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

定義域：$-2x+6 \geqq 0$ より　$x \leqq 3$

値域：$y \leqq 0$

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を述べよ．

$$y = -\sqrt{-2x+6} \Rightarrow y^2 = -2x+6$$
$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}y^2+3 \quad (y \leqq 0)$$

ここで x と y を入れ換えて

$$y = -\frac{1}{2}x^2+3 \quad (x \leqq 0)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2+3$$

c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．［極限の定義に戻らなくてよい．］

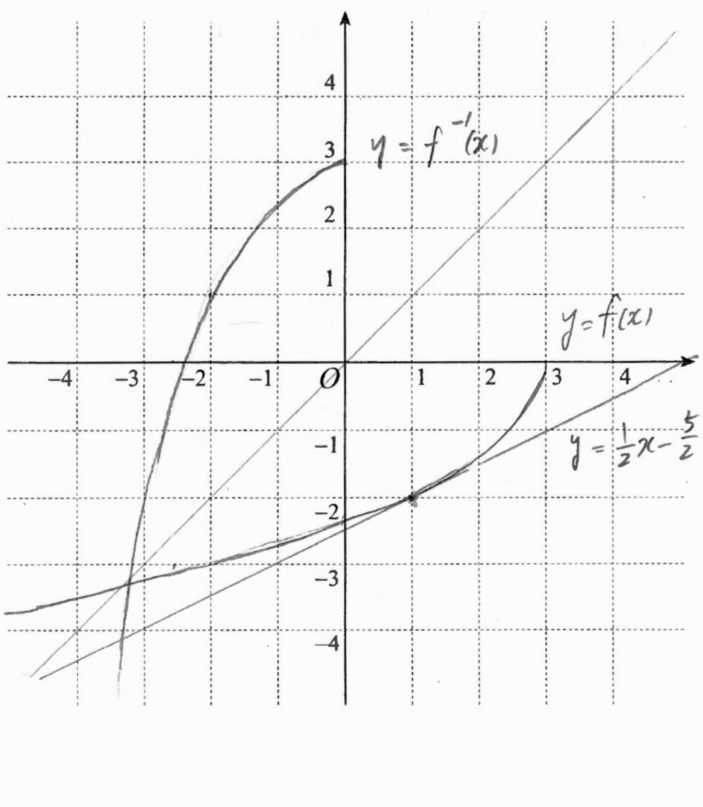
$$f'(x) = \left(-(-2x+6)^{\frac{1}{2}}\right)'$$
$$= -\frac{1}{2}(-2x+6)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x+6)'$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-2x+6}}$$

d) $y = f(x)$ のグラフの $(1, -2)$ における接線の方程式を求めよ．

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y-(-2) = \frac{1}{2}(x-1)$$
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

e) $y = f(x)$ のグラフ，$y = f(x)$ の $(1, -2)$ における接線，逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを右上の座標平面内に描け．



$\boxed{4}$ 次の各々の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)'(x^2+x+1) - (x-1)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2+x+1-(x-1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x) = \left((x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \times (x^2+1)'$$
$$= -x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{-x}{(\sqrt{x^2+1})^3}$$

c) $f(x) = (x^2+1)e^{-2x}$

$$f'(x) = (x^2+1)'e^{-2x} + (x^2+1)(e^{-2x})'$$
$$= 2xe^{-2x} + (x^2+1)e^{-2x} \times (-2)$$
$$= -2(x^2-x+1)e^{-2x}$$

d) $f(x) = x^2 \log x$

$$f'(x) = (x^2)'\log x + x^2(\log x)'$$
$$= 2x\log x + x^2 \times \frac{1}{x}$$
$$= x(2\log x + 1)$$

2017
~~2016~~年1月20日

基礎数学 A2	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名
金曜2限 担当: 鍬田 政人							

$\boxed{5}$ $f(x) = (-x-2)e^{-x}$ とする.

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = (-x-2)'e^{-x} + (-x-2)(e^{-x})'$$
$$= -e^{-x} + (-x-2)e^{-x} \times (-1)$$
$$= (x+1)e^{-x}$$

b) $f'(x) = 0$ となる x と, $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$$f'(x) = 0 \iff (x+1)e^{-x} = 0$$
$$\iff x+1 = 0$$
$$\iff x = -1$$
$$f'(x) > 0 \iff (x+1)e^{-x} > 0$$
$$\iff x+1 > 0 \quad (\because e^{-x} > 0)$$
$$\iff x > -1$$

c) $f(x)$ の2次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$$f''(x) = (x+1)'e^{-x} + (x+1)(e^{-x})'$$
$$= e^{-x} + (x+1)e^{-x} \times (-1)$$
$$= -xe^{-x}$$

d) $f''(x) = 0$ となる x と, $f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$$f''(x) = 0 \iff -xe^{-x} = 0$$
$$\iff x = 0$$
$$f''(x) = 0 \iff -xe^{-x} > 0$$
$$\iff x < 0$$

e) $f(x)$ の増減表を完成させよ.（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること.）

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$

f) $e = 2.718$, $e^{-1} = 0.368$ として $f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ を求めよ. ただし, 答えは小数第3位を四捨五入して小数第2位まで求めること.

$f(-3) =$ 20.09

$f(-2) =$ 0.00

$f(-1) =$ −2.72

$f(0) =$ −2.00

$f(1) =$ −1.10

$f(2) =$ −0.54

g) $f(x)$ の極大値・極小値があればそれを求め, それらをとる x の値を求めよ.

極大値 なし

極小値 $-e$ $(x=-1)$

h) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ.

$x = 0$

i) ここまでの結果を反映させ, $y = f(x)$ のグラフをなるべく丁寧に描け.