入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏名

1 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とする.

a) $f(x)$ の定義域を述べよ.

真数条件 $x>0$ かつ分母 $x \neq 0$ より

$x>0$

b) 関数 $f(x)$ の増減表を書き，増減を調べよ.（凹凸は調べなくてよい.）

$$f'(x) = \frac{(\log x)'x - \log x \times (x)'}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

$f'(x)=0 \iff \log x = 1 \iff x = e$

$x<e$ のとき $f'(x)>0$

$x>e$ のとき $f'(x)<0$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

c) b) の結果を用い，$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ を示せ.

b) より $f(x)$ は $x=e$ で最大値をとる.

したがって e 以外の任意の x について $\dfrac{\log x}{x} < \dfrac{\log e}{e}$

とくに $\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$

d) c) の結果を用い，π^e と e^π のどちらが大きいかを示せ.［ヒント：$\log \pi^e$ と $\log e^\pi$ の大小を比較せよ.］

$\dfrac{\log \pi}{\pi} < \dfrac{\log e}{e}$ の両辺に πe をかけ

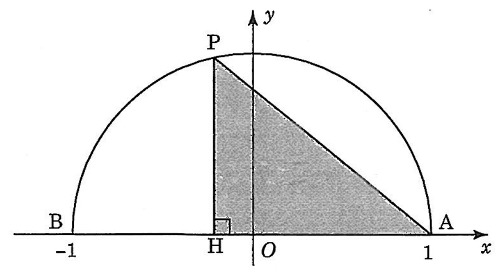
$e \log \pi < \pi \log e$

$\Rightarrow \log \pi^e < \log e^\pi$

一般に $\log A < \log B \iff A<B$ だから

$\pi^e < e^\pi$

2 長さ2の線分 AB を直径とする半円の周上の動点を $P(x, y)$ とし，P から AB 下ろした垂線の足を H とする.



a) $\triangle$APH の面積 S を x で表せ.

上半円は関数 $y=\sqrt{1-x^2}$ のグラフ

$\therefore P(x, \sqrt{1-x^2})$

$S = \dfrac{1}{2}\overline{HA} \times \overline{HP}$

$= \dfrac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}$

b) S の最大値を求めよ.

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}(1-x)'\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x)\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2\cancel{2}}(1-x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-\cancel{2}x)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1-x^2+x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2x^2-x-1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2x+1)(x-1)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	
$\frac{dS}{dx}$	X	$+$	0	$-$	X
S		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↘	

増減表より

$x = -\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

3 $f(x)=(x+2)e^{-2x-2}$ とする．$f(x)$ の増減とグラフ $y=f(x)$ の凹凸を調べ，グラフの概形を描け．また，$f(x)$ の極大値・極小値とグラフの変曲点を求めよ．

$$f'(x) = e^{-2x-2} + (x+2)e^{-2x-2}\times(-2)$$
$$= (-2x-3)e^{-2x-2}$$
$$f''(x) = -2e^{-2x-2} + (-2x-3)e^{-2x-2}\times(-2)$$
$$= (4x+4)e^{-2x+2}$$

$f'(x)=0 \iff x=-\frac{3}{2}$

$x<-\frac{3}{2} \Rightarrow f'(x)>0$

$x>-\frac{3}{2} \Rightarrow f'(x)<0$

$f''(x)=0 \iff x=-1$

$x<-1 \Rightarrow f''(x)<0$

$x>-1 \Rightarrow f''(x)>0$

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$

極大値 1 $\left(x=-\frac{3}{2}\right)$

極小値 なし

変曲点 $x=-1$. （正確には $(-1, 1)$）