[1] $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{12}$ とする.

a) $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ をそれぞれ求めよ.

$\frac{29}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{12}$, -1, $\frac{31}{12}$, $\frac{65}{3}$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と２次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$f'(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$f''(x) = 3x^2 + 2x - 1$

c) $f'(x) = 0$ となる x と, $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$f'(x) = (x+1)^2(x-1)$ だから

$f'(x) = 0 \iff x = 1, -1$

$f'(x) > 0 \iff x > 1$

d) $f''(x) = 0$ となる x と, $f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$f''(x) = (3x-1)(x+1)$ だから

$f''(x) = 0 \iff x = -1, \frac{1}{3}$

$f''(x) > 0 \iff x < -1,\ x > \frac{1}{3}$

e) $f(x)$ の増減表を完成させよ.（増減だけでなくグラフの凹凸も調べること.）

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$				
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$				
$f(x)$	↘		↘	変曲点	↘	極小	↗				

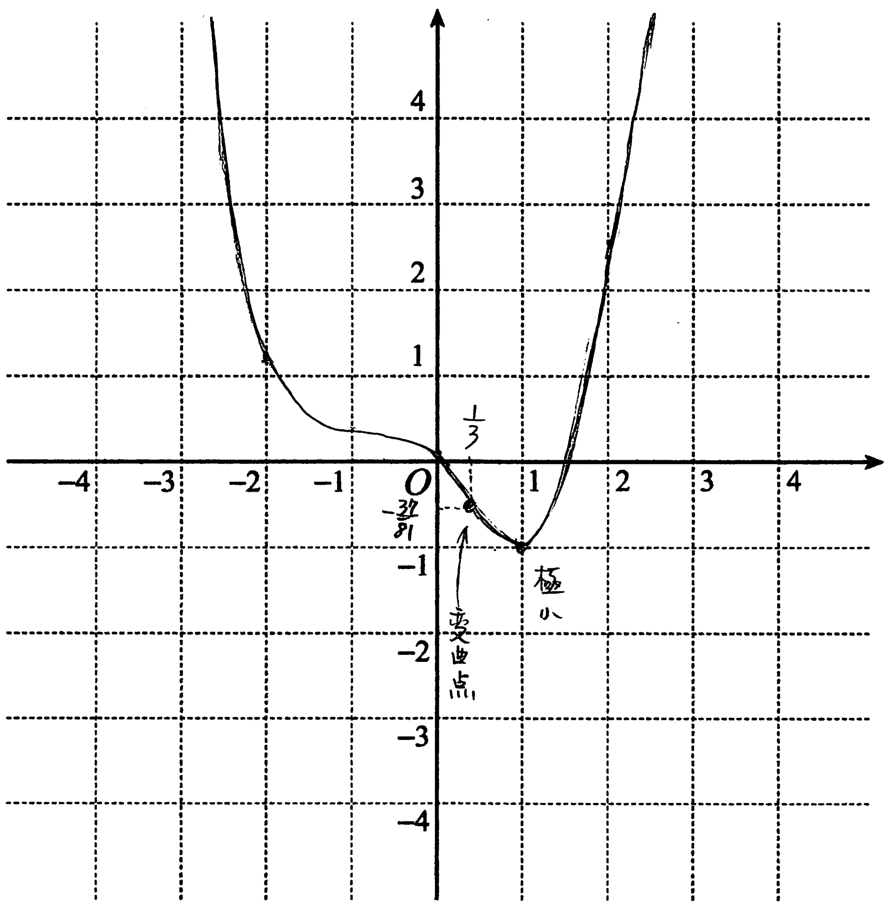
入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
						氏名

f) $f(x)$ が極大・極小となる x の値を求めよ．また，$f(x)$ の極大値および極小値を小数で表せ．ただし，答えは小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めること．

極大となる x なし

極小となる $x=1$， 極小値 $f(1)=-1.00$

g) $y=f(x)$ のグラフを，ここまでの結果を反映させて，なるべく丁寧に描け．



【裏に続く】

$\boxed{2}$ $f(x) = 4xe^{-\frac{x^2}{2}}$ とする.

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = 4e^{-\frac{x^2}{2}} + 4x\,e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right)'$$
$$= 4(1-x^2)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$f''(x) = -8x\,e^{-\frac{x^2}{2}} + 4(1-x^2)\,e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$$
$$= 4x(x^2-3)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

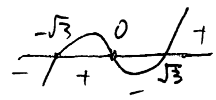
b) $f'(x) = 0$ となる x と, $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ だから

$$f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x = \pm 1$$
$$f'(x) > 0 \iff 1 - x^2 > 0 \iff -1 < x < 1$$

c) $f''(x) = 0$ となる x と, $f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$$f''(x) = 0 \iff x(x^2-3) = 0 \iff x = 0,\ \pm\sqrt{3}$$
$$f''(x) > 0 \iff x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0$$
$$\iff -\sqrt{3} < x < 0,\quad x > \sqrt{3}$$



d) $f(x)$ の増減表を完成させよ. (増減だけでなくグラフの凹凸も調べること.)

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	変曲点	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)

e) $f(x)$ が極大・極小となる点，および変曲点を求めよ．

極大 ： $x=1$

極小 ： $x=-1$

変曲点 ： $x=-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$

f) $e^{-\frac{1}{2}} \fallingdotseq 0.607$，$e^{-\frac{3}{2}} \fallingdotseq 0.223$，$e^{-2} \fallingdotseq 0.135$ であるとして，$f(\pm 1)$, $f\left(\pm\sqrt{3}\right)$, $f(\pm 2)$ の値を概算せよ．

$f(\pm 1) = \pm 4 e^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq \pm 2.428$

$f(\pm\sqrt{3}) = \pm 4\sqrt{3}\, e^{-\frac{3}{2}} \fallingdotseq \pm 4 \times 1.732 \times 0.223 \fallingdotseq 1.545$

$f(\pm 2) = \pm 8 e^{-2} \fallingdotseq 1.080$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ であることが知られている．これと，ここまでの結果を用いて，$f(x)$ のグラフを描け．