11 指数・対数関数の導関数/関数の増減　　2016年度後期　基礎数学A2（金曜2限）

1 $f(x)$ に対し，$(\log f(x))'$ を $f(x)$ と $f'(x)$ を用いて表せ．

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

2 次の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = x^2 e^{-2x}$

$$f'(x) = (x^2)' e^{-2x} + x^2 (e^{-2x})'$$

$$= 2x e^{-2x} + x^2 e^{-2x} \times (-2)$$

$$= 2x(1-x) e^{-2x}$$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-x^2)'$$

$$= -2x e^{-x^2}$$

c) $f(x) = x \log x$

$$f'(x) = (x)' \log x + x (\log x)'$$

$$= \log x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \log x + 1$$

d) $f(x) = e^x \log x$

$$f'(x) = (e^x)' \log x + e^x (\log x)'$$

$$= e^x \log x + e^x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= e^x \left(\log x + \frac{1}{x} \right)$$

e) $f(x) = \log(x^2 + 1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \times (x^2+1)'$$

$$= \frac{2x}{x^2+1}$$

f) $f(x) = \dfrac{x}{\log x - 1}$

$$f'(x) = \frac{(x)'(\log x - 1) - x(\log x - 1)'}{(\log x - 1)^2}$$

$$= \frac{\log x - 1 - x \cdot \frac{1}{x}}{(\log x - 1)^2}$$

$$= \frac{\log x - 2}{(\log x - 1)^2}$$

2016年12月9日

入学年度		学部	学科		組		番号			検	フリガナ	
											氏名	

3 $f(x) = xe^{-x}$ とする.

a) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})'$$
$$= e^{-x} + x e^{-x}(-x)'$$
$$= (1-x)e^{-x}$$

b) 微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

$$f'(0) = (1-0)e^{-0} = 1$$

c) 曲線 $y = xe^{-x}$ の原点 $(0,0)$ における接線の方程式を求めよ.

接線は $(0,0)$ を通り, 傾き 1 の直線

$\therefore y = x$

d) 関数 $f(x) = xe^{-x}$ の増減を調べ, 増減表を完成させよ.

$f'(x) = 0 \iff (1-x) = 0 \iff x = 1$

$f'(x) > 0 \iff (1-x) > 0 \iff x < 1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

極大

【裏に続く】

4 $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ とする.

a) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ.

根号内 $\geqq 0 \iff 4-x^2 \geqq 0 \iff -2 \leqq x \leqq 2$

b) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = (x)'\sqrt{4-x^2} + x\left((4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'$$
$$= \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(4-x^2)'$$
$$= \sqrt{4-x^2} - x^2\,\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$= \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる範囲を求めよ.

$f'(x) = 0 \iff$ 分子 $=0 \iff 2-x^2=0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

$-2 < x < 2$ では $\sqrt{4-x^2} > 0$ なので

$f'(x) > 0 \iff 2-x^2 > 0 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

d) $f(x)$ が定義域内での増減表を書け.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

e) $f(x)$ の定義域内での最大値，最小値を求めよ.

$x = \sqrt{2}$ のとき 最大値 2

$x = -\sqrt{2}$ のとき 最小値 -2

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)

5 直円柱の形をした缶詰の容器の容積が V で一定であるとき，その表面積 S を最小にしたい．

a) 底面の半径を r，高さ h とするとき，S と V をそれぞれ r と h で表せ．

$S = 2\times$(底面積) $+$ 側面積 $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$V =$ 底面積 $\times$ 高さ $= \pi r^2 h$

b) S を V と r で表せ．

$V = \pi r^2 h$ より $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

これを S の式に代入し．

$$S = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi} \cancel{r} \cdot \frac{V}{\cancel{\pi r^2}} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

c) S を r の関数とみて，$\dfrac{dS}{dr}$ を計算し，S の増減表を書け．

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

$$\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{V}{2\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

r	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$\cdots$
$\frac{dS}{dr}$	×	$-$	0	$+$
S		↘	最小	↗

d) S が最小になるときの r の値を求めよ．また，そのときの h の値も求めよ．

増減表より $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ のとき S は最小．

このとき $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \dfrac{V}{\pi}\cdot\left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} = V^{\frac{1}{3}}\cdot\pi^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$