a を正の数としたとき，指数関数 $f(x) = a^x$ の導関数を求めたい.

まず，$f(x) = a^x$ の $x = 0$ における微分係数を求める．その定義式は $f'(0) = \lim_{h\to 0} \boxed{}$

実験として $a = 2, a = 3$ のときに $\dfrac{a^h - 1}{h}$ の値の数値計算をしてみる．$\sqrt{}$ 機能のある電卓を用いて，$2^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{1.414\cdots}$，$2^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \ldots$ のように計算することにより，下の表を作ると

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
$\frac{1}{2}$	$(1.41421356\ldots - 1) \times 2 = 0.82842712\ldots$	$(1.73205080\ldots - 1) \times 2 = 1.4641016\ldots$
$\frac{1}{4}$	$(1.18920711\ldots - 1) \times 4 =$	$(1.31607401\ldots - 1) \times 4 =$
$\frac{1}{8}$	$=$	$=$
$\frac{1}{16}$	$=$	$=$
$\frac{1}{32}$	$=$	$=$
$\frac{1}{64}$	$=$	$=$
$\frac{1}{128}$	$=$	$=$
$\frac{1}{256}$	$=$	$=$
$\frac{1}{512}$	$=$	$=$
$\frac{1}{1024}$	$=$	$=$
$\vdots$	$\downarrow$	$\downarrow$
0		

この表より $\lim_{h\to 0} \dfrac{2^h - 1}{h} = \boxed{}$，$\lim_{h\to 0} \dfrac{3^h - 1}{h} = \boxed{}$ と推測できる.

入学年度		学部	学	科	組		番	号		検	フリガナ	
											氏 名	

$f'(0)$ は曲線 $y = a^x$ 上の点 $(0, 1)$ のおける接線の傾きであるが，これは，a が増えるにつれて増える．したがって，傾きがちょうど 1 になる a があるはずである．そして，左の数値実験の結果より，この a は 2 と 3 の間にある．このような a を e と書き，Nepier の数とか，自然対数の底と呼ぶ．すなわち，数 e は次の式をみたすような数である.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$\boxed{1}$ 上の極限を用いて関数 $f(x) = e^x$ の導関数を定義を直接用いて求めよ.

$\boxed{2}$ 指数関数と対数関数の互いには $e^{\log a} = a$ という関係が成り立つ．これより，$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$ である．このことと合成関数の微分公式を用いて，指数関数 a^x の導関数 $(a^x)'$ をもとめよ.

$\boxed{3}$ $f(x) = e^x$ とすると，自然対数関数 $\log x$ はその逆関数である，すなわち $f^{-1}(x) = \log x$ である．逆関数の微分公式と $f'(x) = e^x$ であることを用い，$f^{-1}(x) = \log x$ の導関数を求めよ.

$\boxed{4}$ 次の表は $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を計算するためのものである．$h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{1024}$ として電卓を用いて $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を計算し，表の空欄を埋め，極限値 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を推測せよ.

［電卓では数の 2 乗を計算するのに "× =" と入力すればよい．例えば，$\left((1\div 4+1)^2\right)^2$ を計算するには，
1，÷，4，+，1，=，×，=，×，=，の順に入力すればよい.］

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
$\frac{1}{2}$	$(1\div 2+1)^2 = 2.25$
$\frac{1}{4}$	$\left((1\div 4+1)^2\right)^2 = 2.441406\ldots$
$\frac{1}{8}$	$=$
$\frac{1}{16}$	$=$
$\frac{1}{32}$	$=$
$\frac{1}{64}$	$=$
$\frac{1}{128}$	$=$
$\frac{1}{256}$	$=$
$\frac{1}{512}$	$=$
$\frac{1}{1024}$	$=$
$\vdots$	$\downarrow$
0	

実は，$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ であることが示されるので，上の計算より，$e = \boxed{}$ と推測される.

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)

$\boxed{5}$ 関数 $y=e^x$ について，いろいろな x に対する y の値は次の表のようになる.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
e^x	0.1353	0.2231	0.3679	0.6065	1.0000	1.6487	2.7183	4.4817	7.3891	12.183

これを利用して，指数関数 $y=e^x$ のグラフを描き，そのグラフの $(0,1)$ における接線を引いてみよ．また，対数関数 $y=\log x$ は $y=e^x$ の逆関数であることを用い，$y=\log x$ のグラフを描き，$(1,0)$ における接線を引いてみよ.