入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
						氏名

1 次のそれぞれの式を簡単にせよ．ただし，文字はすべて正とする．

a) $4^{\frac{2}{3}} \times 8^{-\frac{1}{2}} \div 16^{-\frac{1}{6}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} \times (2^3)^{-\frac{1}{2}} \times (2^4)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \ (=\sqrt{2})$

b) $(a^{\frac{1}{3}}-1)(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1) = (a^{\frac{1}{3}})^3 - 1 = a-1$

c) $(a^x+a^{-x})^2-(a^x-a^{-x})^2 = a^{2x}+2+a^{-2x}-(a^{2x}-2+a^{-2x}) = 4$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[12]{a^{11}}} = \dfrac{a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{11}{12}}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{11}{12}} = a^{\frac{6}{12}} = a^{\frac{1}{2}} \ (=\sqrt{a})$

e) $\dfrac{(ab^{-\frac{5}{2}})\div(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{5}{4}})}{(a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}})\div(a^{\frac{9}{4}}b^{-\frac{1}{2}})} = \dfrac{ab^{-\frac{5}{2}}\times a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{4}}}{a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}}\times a^{-\frac{9}{4}}b^{\frac{1}{2}}} = a^{1-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}}\cdot b^{-\frac{5}{2}+\frac{5}{4}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{9}{2}}b^{-\frac{5}{2}}$

2 次の数の大小をくらべよ．0.5^4，0.5^{-3}，2^{-2}．

$0.5^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2^{-4}$，$0.5^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3$

指数の大きさを比べて　$2^{-4} < 2^{-2} < 2^3$

$\therefore\ 0.5^4 < 2^{-2} < 0.5^{-3}$

3 次の不等式をみたす x の範囲を求めよ．

a) $0.3^x > 0.09$

$0.3^x > (0.3)^2$

$0.3<1$ だから　$0.3^a > 0.3^b \Leftrightarrow a<b$

$\therefore\ x < 2$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geqq (\sqrt{2})^x$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^{-x+1}$，$(\sqrt{2})^x = 2^{\frac{x}{2}}$ より

$2^{-x+1} \geqq 2^{\frac{x}{2}}$

$-x+1 \geqq \frac{x}{2}$

$\frac{3}{2}x \leqq 1$

$\therefore\ x \leqq \frac{2}{3}$

4 $\log_2 3 = a$ とするとき，次のそれぞれの値を a を用いて表せ．

a) $\log_4 9$

$= \dfrac{\log_2 9}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 3^2}{2}$

$= \dfrac{2a}{2} = a$

b) $\log_3 4$

$= \dfrac{\log_2 4}{\log_2 3} = \dfrac{2}{a}$

c) $\log_9 2$

$= \dfrac{\log_2 2}{\log_2 9} = \dfrac{1}{2\log_2 3}$

$= \dfrac{1}{2a}$

5 次のそれぞれの式を簡単にせよ．

a) $2^{\log_2 3} = 3$　（$\log_2 3$ は「2をこれ乗すると3になる」数と定義されるから。すなわち $x=\log_2 3$ とおくと $2^x=3$ となる.）

b) $\frac{1}{2}\log_5 3 + 3\log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24}$

$= \log_5 3^{\frac{1}{2}} + \log_5 2^{\frac{3}{2}} - \log_5 (\underbrace{3\times 2^3}_{24})^{\frac{1}{2}} = \log_5 \dfrac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}} = \log_5 1 = 0$

c) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2) \overset{\text{底を2にそろえた}}{=} \left(\log_2 3 + \dfrac{\log_2 9}{\log_2 4}\right)\left(\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 2}{\log_2 9}\right)$

$= \left(\log_2 3 + \dfrac{2\log_2 3}{2}\right)\left(\dfrac{2}{\log_2 3}+\dfrac{1}{2\log_2 3}\right) = \cancel{2\log_2 3} \times \dfrac{5}{\cancel{2\log_2 3}} = 5$

d) $\log_2 8\cdot\log_{27} 5\cdot\log_5 3 = \log_2 2^3 \cdot \dfrac{\cancel{\log_2 5}}{\log_2 27} \times \dfrac{\log_2 3}{\cancel{\log_2 5}} = \cancel{3} \times \dfrac{1}{\cancel{3}\cancel{\log_2 3}} \times \dfrac{\cancel{\log_2 3}}{1} = 1$

底を2にそろえた

6 次の方程式を解け．

a) $\log_{0.5}(x+1)(x+2) = -1$　まず「真数条件」より　$(x+1)(x+2)>0 \Leftrightarrow x<-2$ または $x>-1$　—①

$\log_{0.5}(x+1)(x+2) = \log_{0.5} 0.5^{-1}$

$\Rightarrow (x+1)(x+2) = 2$

$\Rightarrow x^2+3x+2 = 2$

$x^2+3x=0$

$x(x+3)=0$

$x=0,-3$．これらは①をみたすので

$x=0,-3$

b) $\log_3(x-2)+\log_3(2x-7)=2$

真数条件は　$x-2>0$ かつ $2x-7>0 \Leftrightarrow x>\frac{7}{2}$　—②

$\log_3(x-2)(2x-7) = \log_3 3^2$

$2x^2-11x+14=9$

$2x^2-11x+5=0$

$(2x-1)(x-5)=0$

$x=\frac{1}{2}, 5$

このうち②をみたすのは $x=5$ のみ

$x=5$

以下の問題では，必要であれば $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いよ．

7 「過疎現象で，村の人口が毎年 1 割ずつ減っていくので，このままでは 10 年経つと村は空っぽになる…」これは正しいか．正しければ証明し，そうでなければ，10 年後の人口がどれぐらいに減っているかを求めよ．

10年後に村の人口はもとの $\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$ になるが，これは正の値であり 0ではない

したがって村は空っぽになることはない．

（実際に $\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$ を電卓で計算してみると 約0.35 となる。したがって

村の人口はもとの人口の $\frac{1}{3}$ 程度になるに過ぎない）

8 a) 2^{41} は何桁の数か．

b) 2^{41} の最高位の数字を求めよ．

$$\log_2 2^{41} = 41\log_2 2 \fallingdotseq 41\times 0.3010 = 12.341$$

a) $10^{12} \leqq 2^{41} < 10^{13}$ より 2^{41} は 13 桁の数

b) $12 + \log_2 2 \leqq \log_2 2^{41} = 12.341\cdots < 12 + \log_2 3$ より

$$2\times10^{12} \leqq 2^{41} < 3\times10^{12}$$

よって最高位の数は 2.

9 体内に入った水銀が体外に排出されて，もとの量の $\frac{1}{2}$ になるには 125 日かかるといわれている．もとの量の $\frac{1}{10}$ 以下になるには何日かかるか．

x日後に体内に残る水銀量は，もとの $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{125}}$ と表せる．

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{125}} \leqq \frac{1}{10}$ を解けばよい

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{125}} \leqq \log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\frac{x}{125}\times(-0.3010) \leqq -1$$

$$x \geqq \frac{125}{0.3010} = 415.28$$

416日後に $\frac{1}{10}$ 以下になる

10 座標軸の 1 目盛りを 1cm として関数 $y = 2^x$ のグラフをかくとき，x の変域をたとえば $0 \leqq x \leqq 10$ とすると y の変域は $1 \leqq y \leqq 2^{10}$ となり，グラフ用紙は y 軸方向について 1024cm の長さが必要と考えられる．x の変域を $0 \leqq x \leqq 60$ としたとき，グラフ用紙は理論的にはおよそどのくらいの長さが必要か．次のうちから最も近いものを選び，理由をつけて答えよ．

a) 1km　b) 100km　c) 地球から月までの距離（約 38 万 km）

d) 地球から太陽までの距離（約 1.5×10^{11}m）　e) 1 光年（約 9.5×10^{15}m）

2^{60}cm がどれくらいの長さかを概算する。単位を m にそろえる

また $2^{10} = 1024 \fallingdotseq 10^3$ であることを用いる

$$2^{60}\text{cm} = 2^{60} \times \frac{1}{100}\text{m} \fallingdotseq (10^3)^6 \times 10^{-2}\text{m} = 10^{16}\text{m}$$

一方，1光年は $9.5\times10^{15}\text{m} \fallingdotseq 10\times10^{15}\text{m} = 10^{16}\text{m}$ だから

e) の 1光年が最も近い．

11 星の見かけの明るさは 1 等星，2 等星，⋯，など，等級で表す．星の等級と明るさの関係は，次のように対数を用いて表すことができる．m 等星の明るさを L_m，n 等星の明るさ L_n とすると，

$$0.4(n - m) = \log_{10} L_m - \log_{10} L_n$$

が成り立つ．

a) 1 等星の明るさは 6 等星の明るさの何倍であるか．

明るさの比 $\frac{L_1}{L_6}$ を求めればよい。上の式で $m=1$, $n=6$ とおくと

$$0.4(6-1) = \log_{10}\frac{L_1}{L_6} \Rightarrow 2 = \log_{10}\frac{L_1}{L_6} \Rightarrow \frac{L_1}{L_6} = 10^2 = 100$$

100倍

b) 北極星は 2.0 等星である．北極星の 4 倍の明るさを持つ星は何等星となるか．

この星が m 等星であるとすると，$L_m = 4L_2$ より

$$0.4(2-m) = \log_{10}\frac{L_m}{L_2} = \log_{10}4$$

$$2-m = \frac{2\log_{10}2}{0.4}$$

$$m = 2 - 5\log_{10}2 \fallingdotseq 2 - 5\times0.3010 = 0.495$$

0.495等星

担当：鍬田 政人 (kuwata@tamacc.chuo-u.ac.jp)