学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次の関数で，各々の場合について平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ．

a) $f(x)=3x^2+1$，$x$ が 1 から 3 まで変化するとき

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{28-4}{2}=12$$

b) $f(x)=x^3-1$，$x$ が $-1$ から 2 まで変化するとき

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{7-(-2)}{3}=3$$

c) $f(x)=3x^2+1$，$x$ が $a$ から $a+h$ まで変化するとき

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{3(a+h)^2+1-(3a^2+1)}{h}=\frac{6ah+3h^2}{h}$$

$$=6a+3h$$

2 関数 $f(x)=(2x+1)^2$ とするとき，次の微分係数を定義にしたがって求めよ．

a) $f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{(2(-1+h)+1)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2h-1)^2-1}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h^2-4h}{h}=\lim_{h\to 0}(4h-4)=-4$$

b) $f'(b)=\lim_{h\to 0}\frac{(2(b+h)+1)^2-(2b+1)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{((2b+1)+2h)^2-(2b+1)^2}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h(2b+1)+4h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(4(2b+1)-4h)=8b+4$$

3 関数 $f(x)=x^3-1$ の $x=-1$ における微分係数 $f'(-1)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^3-1-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{-1}+3h-3h^2+h^3\cancel{+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3-3h+h^2)=3$$

4 関数 $f(x)=x^2+px+q$ において，次の問いに答えよ．

a) $x$ が $a$ から $b$ まで変化するときの平均変化率を求めよ．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2+pb+q)-(a^2+pa+q)}{b-a}=\frac{(b^2-a^2)+p(b-a)}{b-a}$$

$$=b+a+p$$

b) $x=c$ における微分係数を定義にしたがって求めよ．

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{(c+h)^2+p(c+h)+q-(c^2+pc+q)}{h}$$

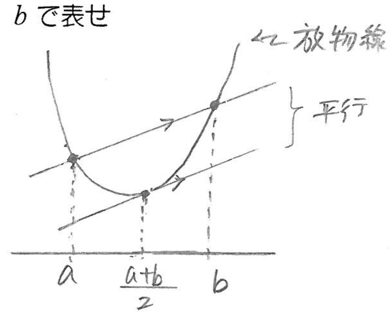
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{c^2}+2hc+h^2\cancel{+pc}+ph\cancel{+q}\cancel{-c^2}\cancel{-pc}\cancel{-q}}{h}=\lim_{h\to 0}(2c+h+p)$$

$$=2c+p$$

c) a) の平均変化率と b) の微分係数とが等しいとき，$c$ を $a$，$b$ で表せ

$$b+a+p=2c+p$$

$$\therefore\ c=\frac{a+b}{2}$$




d) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+p(x+h)+q-(x^2+px+q)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+ph}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h+p)=2x+p$$

e) グラフ $y=f(x)$ の $(a,f(a))$ における接線と $(b,f(b))$ における接線の交点の $x$ 座標を求めよ．

$(a,f(a))$ における接線　$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$y=(2a+p)(x-a)+a^2+pa+q$

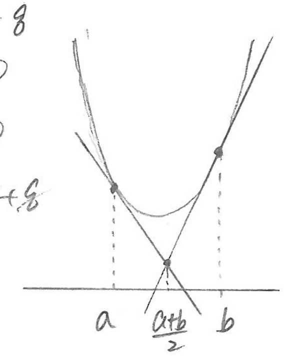
$y=(2a+p)x-a^2+q$ —①

同様に $(b,f(b))$ における接線　$y=(2b+p)x-b^2+q$ —②

①と②の交点を求める　$(2a+p)x-a^2+q=(2b+x)-b^2+q$

$2(a-b)x=a^2-b^2$

$x=\frac{a+b}{2}$



5 関数 $f(x)=(ax+b)^3$ の導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(a(x+h)+b)^3-(ax+b)^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{((ax+b)+ah)^3-(ax+b)^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{(ax+b)^3}+3(ax+b)^2ah+3(ax+b)(ah)^2+(ah)^3-\cancel{(ax+b)^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3a(ax+b)^2+3a^2(ax+b)h+a^3h^2)$$

$$=3a(ax+b)^2$$

6 関数 $f(x)=x^4$ の導関数 $f'(x)$ を定義にしたがって求めよ．

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^4}+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-\cancel{x^4}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)$$

$$=4x^3$$

7 次の関数の導関数を求めよ．（まず，$f(x)$ を展開せよ．）

a) $f(x)=x^3-6x^2+3$

$f'(x)=3x^2-12x$

b) $f(x)=x(7x-3x^2)$

$=7x^2-3x^3$

$f'(x)=14x-9x^2$

c) $f(x)=(2x-1)(3x+5)$

$=6x^2+7x-5$

$f'(x)=12x+7$

d) $f(x)=(5x-1)^2$

$=25x^2-10x+1$

$f'(x)=50x-10$

e) $f(x)=(4x^2-1)(3x+2)$

$=12x^3+8x^2-3x-2$

$f'(x)=36x^2+16x-3$

f) $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$

$=x^3+1$

$f'(x)=3x^2$

8 次の関数を [ ] 内の変数で微分せよ．

a) $s=h+vt-\frac{1}{2}gt^2$ [$t$]

$\frac{ds}{dt}=v-gt$

b) $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ [$r$]

$\frac{dV}{dr}=4\pi r^3$

9 次の関数 $f(x)$ について，$f'(x)$ を求め，$f'(x)>0$ となる $x$ の範囲を求めよ．

a) $f(x)=x^3+3x^2+5$

$f'(x)=3x^2+6x$

$=3x(x+2)$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x(x+2)>0$

$\Leftrightarrow x<-2,\ x>0$

b) $f(x)=x^3-3x^2-9x+15$

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x^2-2x-3)$

$=3(x-3)(x+1)$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3(x-3)(x+1)>0$

$\Leftrightarrow x<-1,\ x>3$

【発展問題】

10 関数 $f(x)=\frac{1}{x}$ について，次の問いに答えよ．

a) $x$ が 1 から $1+h$ まで変化するときの平均変化率を求めよ．

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\frac{1}{h}\times\frac{1-(1+h)}{1+h}=\frac{-h}{h(1+h)}$$

$$=\frac{-1}{1+h}$$

b) $x=1$ における微分係数を求めよ．

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{1+h}=-1$$