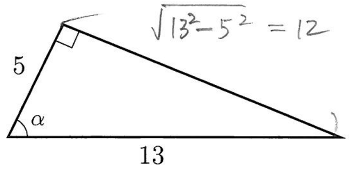
1 右の図の直角三角形について，角 α の正弦，余弦，正接を求めよ．

a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

b) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$

c) $\tan\alpha = \frac{12}{5}$



$\sqrt{13^2-5^2} = 12$

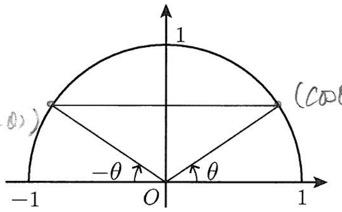
2 右の図を参照して次の式を $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ で表せ．

a) $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$

b) $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

c) $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

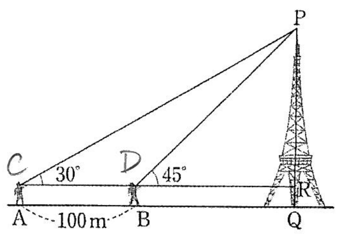
$(\cos(180°-\theta),\ \sin(180°-\theta))$　　$(\cos\theta, \sin\theta)$



3 次の表を完成させよ．

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4 右の図のように，ある地点 A から塔の先端 P を見上げる角を測ったら 30° であった．次に，塔に向かって，100m 進んだ地点 B から P を見上げる角を測ったら 45° であった．目の高さを 1.5m とすると，塔の高さは何 m か．



C, D を右図のように定める。

$PR = DR\tan 45° = CR\tan 30°$ —①

$CR - DR = 100\,m$ —②

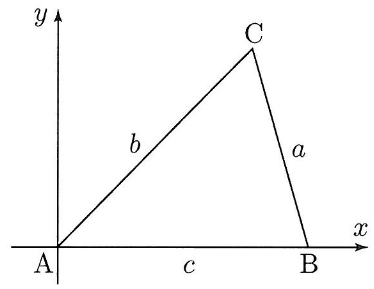
①より $DR = \frac{1}{\sqrt{3}}CR \Rightarrow CR = \sqrt{3}DR$

②より $\sqrt{3}DR - DR = 100\ (m)$

$\therefore DR = \frac{100}{\sqrt{3}-1} = \frac{100(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 50(\sqrt{3}+1)$

$\therefore PQ = PR + 1.5 \fallingdotseq 50\times 2.732 + 1.5 = 138.1\ (m)$

5 三角形 △ABC に対して右図のように座標軸を定めれば，3 頂点の座標はそれぞれ，A(0, 0), B(c, 0), C($b\cos A, b\sin A$) となる．BC の長さの 2 乗を計算することにより余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を証明せよ．



2点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 間の距離は

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ だから

$BC^2 = (b\cos A - c)^2 + (b\sin A)^2$

$= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A$

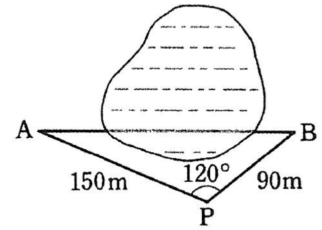
$= b^2\underbrace{(\cos^2 A + \sin^2 A)}_{=1} - 2bc\cos A + c^2$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

6 右の図のように，池を隔てた 2 地点 A，B 間の距離を求めるため，PA，PB，∠APB を測ったところ，

PA= 150m，PB= 90m，∠APB= 120°

であった．A，B 間の距離を求めよ．



$AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2PA\cdot PB\cos P$

$= 150^2 + 90^2 - 2\times150\times90\times\cos120°$

$= 22500 + 8100 + 13500$

$= 44100$

$\therefore AB = \sqrt{44100} = 210\ (m)$

7 次の角は弧度法でいくらか．

a) $12° = \frac{\pi}{15}$　b) $15° = \frac{\pi}{12}$　c) $36° = \frac{\pi}{5}$　d) $45° = \frac{\pi}{4}$

e) $90° = \frac{\pi}{2}$　f) $120° = \frac{2\pi}{3}$　g) $135° = \frac{3\pi}{4}$　h) $150° = \frac{5\pi}{6}$

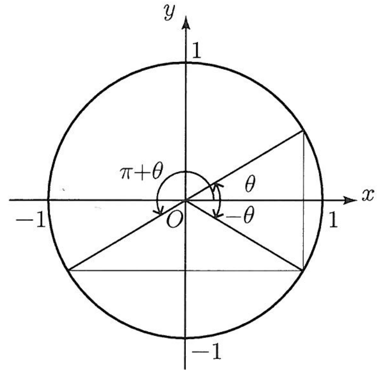
8 弧度法で表された次の角を度数で表せ．

a) $\frac{\pi}{10} = 18°$　b) $\frac{\pi}{5} = 36°$　c) $\frac{2\pi}{3} = 120°$　d) $\frac{5\pi}{12} = 75°$

e) $\frac{5\pi}{4} = 225°$　f) $\frac{3\pi}{2} = 270°$　g) $\frac{7\pi}{4} = 315°$　h) $3\pi = 540°$

【裏に続く】

9 右の図を参照して次の式を $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ で表せ．



a) $\sin(-\theta) =$ $-\sin\theta$

b) $\cos(-\theta) =$ $\cos\theta$

c) $\tan(-\theta) =$ $-\tan\theta$

d) $\sin(\pi+\theta) =$ $-\sin\theta$

e) $\cos(\pi+\theta) =$ $-\cos\theta$

f) $\tan(\pi+\theta) =$ $\tan\theta$

10 次の値を求めよ．

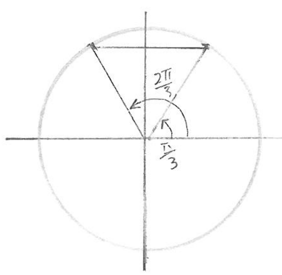
a) $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$　b) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　c) $\sin\frac{4\pi}{4} = 0$

d) $\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　e) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$　f) $\cos\frac{4\pi}{4} = -1$

11 次の方程式をみたす角 θ を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

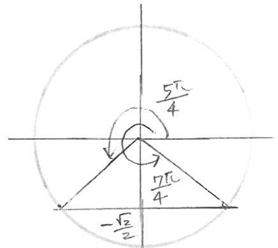
a) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}$



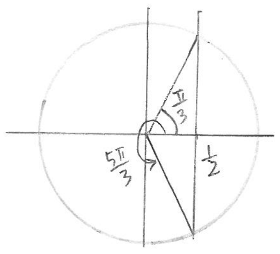
b) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$



c) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

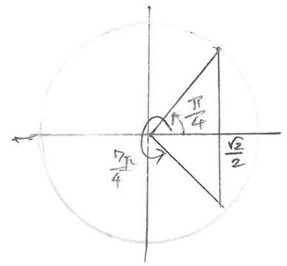
$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$



d) $\sqrt{2}\cos\theta = 1$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

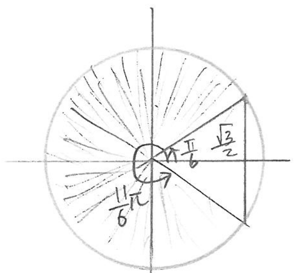
$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$



12 次の不等式をみたす角 θ の範囲を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

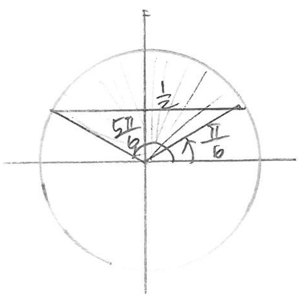
a) $\cos\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{11\pi}{6}$

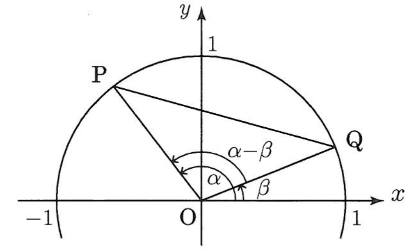


b) $\sin\theta > \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$



13 右の図を参照して三角関数の加法定理を証明したい．



a) $\triangle$OPQ に余弦定理を適用して，PQ^2 を $\cos(\alpha-\beta)$ を用いて表せ．

$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos(\alpha-\beta)$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

b) P，Q の座標がそれぞれ $\mathrm{P}(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$\mathrm{Q}(\cos\beta, \sin\beta)$ であることを使って，PQ^2 を $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\sin\alpha$，$\sin\beta$ を用いて表せ．

$$\mathrm{PQ}^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2$$
$$= \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha$$
$$= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

c) a) と b) の結果をあわせて，$\cos(\alpha-\beta)$ の加法定理を示せ．

$$2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$
$$\therefore \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

d) 関係式 $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ を用いて，$\sin(\alpha+\beta)$ の加法定理を示せ．

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

14 $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ のとき，次の値を求めよ．

a) $\sin 2\theta =$ $2\sin\theta\cos\theta$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ より $\cos\theta < 0$ だから

$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \sin 2\theta = 2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos\frac{\theta}{2} =$

$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{6}}{6}$

ここで $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$ より

$\cos\frac{\theta}{2} < 0$

$\therefore \cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}}$

15 次の方程式を解け．ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

a) $\sin 2x = \cos x$

$2\sin x\cos x = \cos x$

$(2\sin x - 1)\cos x = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ または $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$

b) $\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0$

$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0$

$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$(2\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ または -2

$x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$