

1 次のそれぞれの式を簡単にせよ。ただし、文字はすべて正とする。

a) $4^{\frac{2}{3}} \times 8^{-\frac{1}{2}} \div 16^{-\frac{1}{6}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} \times (2^3)^{-\frac{1}{2}} \times (2^4)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{4}{3} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

b) $(a^{\frac{1}{3}} - 1)(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1) = (a^{\frac{1}{3}})^3 - 1 = a - 1$

c) $(a^x + a^{-x})^2 - (a^x - a^{-x})^2 = a^{2x} + 2 + a^{-2x} - (a^{2x} - 2 + a^{-2x}) = 4$

d) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[12]{a^{11}}} = a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{11}{12}} = a^{\frac{9+8-11}{12}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

e) $\frac{(ab^{-\frac{5}{2}}) \div (a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{3}{4}})}{(a^{-\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{4}}) \div (a^{\frac{9}{4}} b^{-\frac{1}{2}})} = a^{1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9}{4}} \times b^{-\frac{5}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{9}{2}} b^{-\frac{5}{2}}$

2 次の数の大小をくらべよ。 0.5^4 , 0.5^{-3} , 2^{-2} 。

$$0.5^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2^{-4}$$

$$0.5^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3$$

$$\therefore 0.5^4 < 2^{-2} < 0.5^{-3}$$

3 次の不等式をみたす x の範囲を求めよ。

a) $2^x > 9$

両辺の \log_2 をとり

$$\log_2 2^x > \log_2 9$$

$$x > \log_2 9$$

$$x > 2 \log_2 3$$

b) $0.3^x > 0.09$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^x > \left(\frac{3}{10}\right)^2$$

$$\frac{3}{10} < 1 \text{ より}$$

$$x < 2$$

4 $\log_2 3 = a$ とするとき、 $\log_4 9$, $\log_3 4$, $\log_9 2$ を a を用いて表せ。

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \log_2 3 = a, \quad \log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \frac{2}{a}$$

$$\log_9 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 9} = \frac{1}{2 \log_2 3} = \frac{1}{2a}$$

5 次のそれぞれの式を簡単にせよ。

a) $2^{\log_2 3} = 3$ (これは \log_2 の定義に依せらばよい)

b) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) = \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 4}\right) \left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right)$
 $= (\log_2 3 + \log_2 3) \times \left(\frac{2}{\log_2 3} + \frac{1}{2 \log_2 3}\right) = 2 \log_2 3 \times \frac{2 + \frac{1}{2}}{\log_2 3} = 5$

c) $\log_2 8 \cdot \log_{27} 5 \cdot \log_5 3 = \log_2 2^3 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 27} \times \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = 3 \times \frac{1}{3 \log_2 3} \times \log_2 3 = 1$

6 $\log_2(x-1) = 3$ をみたす x の値を求めよ。

$$x-1 = 2^3$$

$$x = 9$$

7 「過疎現象で、村の人口が毎年1割ずつ減っていくので、このままでは10年経つと村は空っぽになる…」これは正しいか。

10年後に村の人口はもとの $\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$ に「なるか」、これは0にはならない。

(もう少し正確に言うと、 $\left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 0.35$ だから、村の人口は10年後でも、もとの人口の $\frac{1}{3}$ 程度は残る。)

以下の問題では $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

8 $(\frac{1}{2})^{30}$ は小数第何位にはじめて0でない数字が現れるか。

$10^{-n} \leq X < 10^{-n+1}$ とするとき、 X を小数で表すと小数第 n 位にはじめて0でない数字が現れる。

$$\log_{10} (\frac{1}{2})^{30} = -30 \times 0.3010 = -0.9030$$

$$\therefore 10^{-10} \leq (\frac{1}{2})^{30} < 10^{-9}$$

したがって $(\frac{1}{2})^{30}$ は小数第10位にはじめて0でない数字が現れる。

9 体内に入った水銀が体外に排出されて、もとの量の $\frac{1}{2}$ になるには125日かかるといわれている。もとの量の $\frac{1}{10}$ 以下になるには何日かかるか。

x 日後に体内に残る水銀量は $(\frac{1}{2})^{\frac{x}{125}}$ と表せる。

$$(\frac{1}{2})^{\frac{x}{125}} \leq \frac{1}{10}$$

$$\log_{10} (\frac{1}{2})^{\frac{x}{125}} \leq \log_{10} (\frac{1}{10})$$

$$-\frac{x}{125} \log_{10} 2 \leq -1$$

$$x \geq \frac{125}{\log_{10} 2} = 415.24 \dots \quad (\text{答}) \text{ 416日後に } \frac{1}{10} \text{ 以下になる}$$

10 30分ごとに分裂して、個数が2倍に増えるバクテリアがある。このバクテリア10個が、1億個以上に増えるのは何時間後か。

バクテリアは1時間後に4倍に増える。

x 時間後には10個のバクテリアは 10×4^x になる

$$10 \times 4^x \geq 10^8$$

$$2^{2x} \geq 10^7$$

$$2x \log_{10} 2 \geq 7$$

$$x \geq \frac{7}{2 \log_{10} 2} = 11.62 \dots$$

(答) 約11.62時間後

(約11時間38分後)

11 座標軸の1目盛りを1cmとして関数 $y = 2^x$ のグラフをかくとき、 x の変域をたとえば $0 \leq x \leq 10$ とすると y の変域は $1 \leq y \leq 2^{10}$ となり、グラフ用紙は y 軸方向について1024cmの長さが必要と考えられる。 x の変域を $0 \leq x \leq 60$ としたとき、グラフ用紙は理論的にはおよそどのくらいの長さが必要か。次のうちから最もふさわしいものを選べ。

a) 1km

b) 100km

c) 地球から月までの距離 (約38万km)

d) 地球から太陽までの距離 (約 1.5×10^{11} m)

e) 1光年 (約 9.5×10^{15} m)

2^{60} cm がどれくらいの長さかを調べよう

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3 \text{ だから } 2^{60} \approx (10^3)^6 = 10^{18} \text{ cm}$$

$$100 \text{ cm} = 1 \text{ m だから } 2^{60} \text{ cm} \approx 10^{16} \text{ m}$$

$$1 \text{ 光年} \approx 9.5 \times 10^{15} \text{ m} \approx 10 \times 10^{15} \text{ m} = 10^{16} \text{ m だから}$$

e) の1光年が一番近い。