

1 次の計算をせよ.

a) $\frac{5x^2}{10x^3} = \frac{1}{2x}$

b) $\frac{8xy^3}{12x^2y^2} = \frac{2y}{3x}$

c) $\frac{1}{x} \times \frac{x^2}{y} = \frac{x}{y}$

d) $\frac{a}{x} \div \frac{a^2}{x^2} = \frac{a}{x} \times \frac{x^2}{a^2} = \frac{x}{a}$

e) $\frac{3abc}{2a^2} \times \frac{8a}{9b^2c} =$

f) $\frac{ab}{xy} \times \frac{y^2}{x^2} \div \frac{bc}{y} = \frac{aby}{x^3} \times \frac{y}{bc} = \frac{ay^2}{cx^3}$

2 次の分数式を約分せよ.

a) $\frac{2x}{6x^2-x} = \frac{2}{6x-1}$

b) $\frac{6x^2+6ax}{3a^2x} = \frac{bx(x+a)}{3a^2x} = \frac{2(x+a)}{a^2}$

c) $\frac{x^2-1}{x^2+x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x}$

d) $\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)^2} = \frac{x+1}{x-2}$

e) $\frac{x^3+1}{x^3-x} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-x+1}{x(x-1)}$

f) $\frac{x^3+8}{x^2+6x+8} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x+4)} = \frac{x^2-2x+4}{x+4}$

3 次の計算をせよ.

a) $\frac{x}{x^2-1} \times \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} \times \frac{(x-1)(x-2)}{x(x+2)} = \frac{x-2}{(x+1)(x+2)}$

b) $\frac{2x+4}{x^2+x-12} \times \frac{x-3}{x^2+6x+8} = \frac{2(x+2)}{(x-3)(x+4)} \times \frac{x-3}{(x+2)(x+4)} = \frac{2}{(x+4)^2}$

c) $\frac{x-4}{x-2} \div \frac{x^2-5x+4}{x^2-4} = \frac{x-4}{x-2} \times \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-4)} = \frac{x+2}{x-1}$

d) $\frac{x^2-9}{x+2} \div (x^2-x-6) = \frac{(x-3)(x+3)}{x+2} \times \frac{1}{(x+2)(x-3)} = \frac{x+3}{(x+2)^2}$

4 次の各組の式を因数分解し、最大公約数と最小公倍数を求めよ.

a) $\begin{cases} x^2-4 = (x-2)(x+2) \\ x^2+4x+4 = (x+2)^2 \end{cases} \begin{cases} \text{最大公約数} = x+2 \\ \text{最小公倍数} = (x-2)(x+2)^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2-x-2 = (x-2)(x+1) \\ x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1) \end{cases} \begin{cases} \text{最大公約数} = x+1 \\ \text{最小公倍数} = (x-2)(x+1)(x^2-x+1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2-1 = (x-1)(x+1) \\ x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1) \\ x^3+2x^2+2x+1 = (x+1)(x^2+x+1) \end{cases} \begin{cases} \text{最大公約数} = (x+1) \\ \text{最小公倍数} = (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) \end{cases}$

5 次の計算をせよ.

a) $\frac{2x}{x+5} - \frac{x-5}{x+5} = \frac{2x-(x-5)}{x+5} = \frac{x+5}{x+5} = 1$

b) $\frac{x-2}{2x} + \frac{x+3}{3x} = \frac{3(x-2)+2(x+3)}{6x} = \frac{5x}{6x} = \frac{5}{6}$

c) $x + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x-1)+x+1}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1}$

d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

e) $\frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} = \frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x)(1+x)}$

f) $\frac{4x}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2+x} = \frac{4x}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{4x^2-(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{3x^2+2x-1}{x(x-1)(x+1)}$

6 a) $x^2+2xy-3y^2$ を因数分解せよ. $x^2+2xy-3y^2 = (x-y)(x+3y) = \frac{(3x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$

b) 上の結果を用い、次の式を計算せよ. $= \frac{3x-1}{x(x-1)}$

$\frac{x-y}{x^2+2xy-3y^2} - \frac{2}{x-y} - \frac{7}{x+3y} = \frac{x-y-2(x+3y)-7(x-y)}{(x-y)(x+3y)} = \frac{-8x}{(x-y)(x+3y)}$

7 次の計算をせよ.

$$a) \frac{\frac{c}{ab}}{ab^2c} = \frac{c}{ab} \times \frac{1}{ab^2c} = \frac{1}{a^2b^3}$$

$$b) \frac{\frac{bc}{b^2}}{\frac{a}{a}} = \frac{bc}{b^2} \times \frac{a}{b^2} = \frac{c}{bd}$$

$$c) \frac{1}{1 - \frac{1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{x+1}{x}$$

$$d) \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{x-1}{x} \times \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$$

$$e) \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \frac{\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2} \times \frac{1}{h}}{h} = \frac{-2xh - h^2}{x^2(x+h)^2} \times \frac{1}{h} = \frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}$$

8 次の計算をせよ.

$$a) \left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right) \div \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^3 - y^3}{xy} \div \frac{x-y}{xy} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy} \times \frac{xy}{x-y} = x^2+xy+y^2$$

$$b) \frac{3x}{x+2} + \frac{4x}{2-x} - \frac{2x-1}{x^2-4} = \frac{3x(x-2) + 4x(-x-2) - (2x-1)}{x^2-4} = \frac{-x^2-16x+1}{x^2-4}$$

$$c) \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{x(x-y) + y(x+y) - (x^2+y^2)}{x^2-y^2} = 0$$

$$d) \frac{1}{x} - \frac{y}{x(x+y)} - \frac{z}{(x+y)(x+y+z)} = \frac{x+y-y}{x(x+y)} - \frac{z}{(x+y)(x+y+z)} = \frac{x+y+z-z}{(x+y)(x+y+z)} = \frac{1}{x+y+z}$$

$$e) \frac{b-c}{(a+b)(a+c)} + \frac{c-a}{(b+c)(b+a)} + \frac{a-b}{(c+a)(c+b)} = \frac{(b-c)(b+c) + (c-a)(a+c) + (a-b)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{b^2-c^2 + c^2-a^2 + a^2-b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0$$

9 ある川にそって、 a km 離れている 2 地点 A, B がある. 川下の A 地点から川上の B 地点まで船で往復するとき、船の静水での速さを毎時 u km, 川の流れる速さを毎時 v km ($v < u$) とし、次の問いに答えよ. [ヒント: A 地点から B 地点までさかのぼる速さは $(u-v)$ km/時, B 地点から A 地点までくだる速さは $(u+v)$ km/時]

a) 往復にかかる時間を求めよ.

$$\text{行き: } \frac{a}{u-v}, \quad \text{帰り: } \frac{a}{u+v}, \quad \text{往復では } \frac{a}{u-v} + \frac{a}{u+v} = \frac{a(u+v) + a(u-v)}{(u-v)(u+v)} = \frac{2au}{u^2-v^2}$$

b) 往復の平均の速さを求めよ.

$$\text{往復の道のり } 2a \text{ km に } a) \text{ で求めた時間 } T \text{ だけかかると } T \text{ から}$$

$$\text{平均の速さ} = 2a \div \frac{2au}{u^2-v^2} = 2a \times \frac{u^2-v^2}{2au} = \frac{u^2-v^2}{u}$$

c) b) で求めた平均の速さと、この船の静水での速さとをくらべよ.

$$\frac{u^2-v^2}{u} = u - \frac{v^2}{u} \text{ から } b) \text{ で求めた平均の速さの方が}$$

$$\text{静水での速さ } u \text{ よりも } \frac{v^2}{u} \text{ だけ遅い.}$$

11 右のような台形 ABCD を、AB のまわりに回転してできる立体 (円錐台) の体積を、次の順に考えて求めよ.

a) OA, OB を a, b, h で表せ. [ヒント: $OA=x$ とおき、 $\triangle OAD \sim \triangle OBC$ を用いる.]

$$OA:OB = AD:BC \text{ より } x:(x+h) = a:b$$

$$\therefore \text{これより } ax+ah = bx, \therefore OA = x = \frac{ah}{b-a}$$

$$OB = OA+h = \frac{ah+bh-ah}{b-a} = \frac{bh}{b-a}$$

b) $\triangle OAD, \triangle OBC$ を、OB のまわりに回転してできる 2 つの円錐の体積をそれぞれ求めよ.

$$\triangle OAD : \frac{1}{3}(\pi a^2) \cdot OA = \frac{\pi}{3} \frac{a^3 h}{b-a}$$

$$\triangle OBC : \frac{1}{3}(\pi b^2) \cdot OB = \frac{\pi}{3} \frac{b^3 h}{b-a}$$

c) 台形 ABCD を AB のまわりに回転してできる円錐台の体積を求め、なるべく簡単な形で表せ.

$$\text{円錐台の体積} = \frac{\pi}{3} \frac{b^3 h}{b-a} - \frac{\pi}{3} \frac{a^3 h}{b-a} = \frac{\pi}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} h = \frac{\pi}{3} (b^2 + ab + a^2) h$$

