

多変数関数の偏微分

1 ある町工場では 2 種類の自転車を作製している. ひとつの種類は標準モデルで, もう 1 種類は競技用モデルである. いま, 一週間に, 標準モデルを  $x$  台, 競技用モデルを  $y$  台製作するのに

$$C(x, y) = 70 + 7x + 10y \text{ (千円)}$$

の費用がかかるとしよう. さらに, 価格と需要の関係は次の式にしたがっているとす.

$$p = 21 - 0.4x + 0.1y$$

$$q = 30 + 0.1x - 1.2y$$

ここで,  $x$  (台),  $y$  (台) はそれぞれ標準モデルと競技用モデルの一週間の需要,  $p$  (千円),  $q$  (千円) はそれぞれ, 標準モデルと競技用モデルの値段である.

- a) 一週間の歳入  $R(x, y)$  を求めよ. また,  $R(25, 10)$  を計算せよ.
- b) 一週間に得られる利潤  $P(x, y) = R(x, y) - C(x, y)$  を求めよ. また,  $P(25, 10)$  を計算せよ.
- c) 競技用モデルの毎週の生産台数が 10 台で一定のとき, 標準モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか.
- d) 逆に, 標準モデルの毎週の生産台数が 25 台で一定のとき, 競技用モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか.

2 変数関数  $z = f(x, y)$  に対し, 変数  $y$  は固定して定数と見なし,  $z$  を  $x$  の 1 変数関数と見なしして微分を計算したものを  $z = f(x, y)$  の  $x$  に関する偏微分と呼ぶ. これを

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_1(x, y) = f_x(x, y) = \partial_x f(x, y)$$

などと様々な記号で表わされる. 同様にして変数  $x$  は固定して定数と見なし,  $z$  を  $y$  の 1 変数関数と見なしして微分を計算したものを  $z = f(x, y)$  の  $y$  に関する偏微分と呼び

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_2(x, y) = f_y(x, y) = \partial_y f(x, y)$$

などと表わす.

2 a) 上の問題の  $P(x, y)$  について,  $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$  を求めよ. また,  $\frac{\partial P}{\partial x}(15, 10)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x}(30, 10)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}(25, 10)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}(25, 15)$  をそれぞれ計算せよ.

b) 利潤  $P(x, y)$  が最大になるような生産台数  $x, y$  の組を求めよ.

3 次の各々の関数について各変数に関する偏微分を計算せよ.

a)  $f(x, y) = 5x^4y^2 - 2xy^5$

b)  $f(x, y) = e^{x-y}$

c)  $f(x, y) = \frac{e^x}{y}$

d)  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

e)  $f(x, y) = \log(x - y)$

f)  $f(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$

関数  $z = f(x, y)$  において  $x$  を  $x + \Delta x$  に,  $y$  を  $y + \Delta y$  に同時に変化させたとき,  $z$  の増分  $\Delta z$  は近似的に

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \Delta y$$

で与えられることが知られている.

4 底面の半径  $r$  cm, 高さ  $h$  cm の直円柱の底面の半径と高さが, それぞれ, わずかに  $\Delta r$  cm,  $\Delta h$  cm ずつ増えたとき, 直円柱の体積はだいたいどれくらい増えるか, また表面積はどれくらい増えるか.

5 生産量  $Q$  が資本  $K$  と労働力  $L$  の関数として  $Q = f(K, L) = 3K^{2/3}L^{1/3}$  と表わされている.

- a)  $\frac{\partial f}{\partial K}(K, L)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial L}(K, L)$  を求めよ. 【注】  $\frac{\partial f}{\partial K}(K, L)$  は資本の限界生産力,  $\frac{\partial f}{\partial L}(K, L)$  は労働の限界生産力と呼ばれる.
- b) いま  $(K, L)$  が  $(1000, 125)$  から  $(998, 128)$  に変化したとき,  $Q$  の変化量の近似値を求めよ.