2015年度前期　　微分積分 II　　火曜 2 限　鍬田 政人

多変数関数の極大・極小

2 変数関数 $z = f(x, y)$ の 2 つの偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ はまた 2 変数関数となる．これらの x または y に関する偏微分を計算することにより 4 つの関数が得られる．これらを $z = f(x, y)$ の 2 階の偏微分と呼ぶ．これらは次のように表わされる．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ある緩やかな条件の下に $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ は一致することが知られている．

$\boxed{1}$ 次の関数の 2 階の偏微分をすべて計算せよ．

a) $f(x, y) = x^2 y + x y^3$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

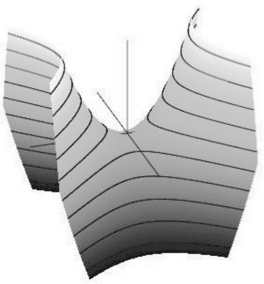
c) $f(x, y) = e^{-x/y}$

d) $f(x, y) = x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}}$

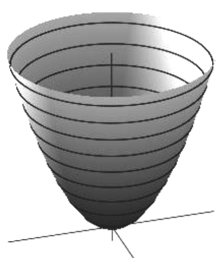
１変数関数はグラフが水平でなければ、ある方向には必ず増大し、その反対方向には減少する．これは 2 変数の場合も同様で，接平面が傾いていれば，元の曲面もその点で山の頂や谷の底にはなり得ない．したがって，関数が点 (a, b) で極大または極小となるための必要条件として

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

が得られる．ただし，これは極大または極小となるための必要条件であって，必ずしも十分条件ではない．上の２つの条件を満たすような点 (a, b) を $f(x, y)$ の臨界点と呼ぶ．



$z = x^2 - y^2$



$z = x^2 + y^2$

関数 $z = f(x, y)$ の臨界点 (a, b) において x を $a + \Delta x$ に，y を $b + \Delta y$ に同時に変化させたとき，z の増分 Δz は近似的に

$$\Delta z \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\,\Delta x^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\,\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\,\Delta y^2\right)$$

で与えられることが知られている．

【裏につづく】

ここで Δz の近似式は Δx，Δy の 2 次同次式で $\frac{1}{2}\bigl(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2\bigr)$ の形になっている．ここで

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = A\Bigl(\Delta x + \frac{B}{A}\Delta y\Bigr)^2 + \Bigl(\frac{AC - B^2}{A}\Bigr)\Delta y^2$$

と変形できることから，$A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ と $AC - B^2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \Bigl(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\Bigr)^2$ の正負によって，極大・極小が判定できる．たとえば，A，$AC - B^2$ がともに正ならば，$\Delta x = \Delta y = 0$ でない限り Δz は正となり，$z = f(x,y)$ は (a,b) で極小になる．これをまとめると次のようになる．

2 変数関数の極大・極小判定法

(1) まず $z = f(x,y)$ の臨界点を求める．すなわち，次の連立方程式の解を求める．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

(2) 2 階微分を計算し，

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \Bigl(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\Bigr)^2$$

を計算する．このとき臨界点 (a,b) において

(a) $D(a,b) > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ となれば f は (a,b) で極大.

(b) $D(a,b) > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ となれば f は (a,b) は極小.

(c) $D(a,b) < 0$ となれば f は (a,b) で極大でも極小でもない（峠点，鞍点）.

(d) $D(a,b) = 0$ ならばこの方法では判定不能.

$\boxed{2}$ 次の関数が極大または極小となる点をもとめよ.

a) $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$

b) $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$

c) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$

d) $f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$

線形代数を履修するなどして，行列式についての知識があれば $D(a,b)$ は行列式を用いて

$$D(a,b) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

と定義されれていることもわかるだろう.