

1 関数 $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ は $f(f^{-1}(x)) = x$ をみたす. この両辺を微分し, それを逆関数の導関数 $(f^{-1}(x))'$ について解くことにより, $(f^{-1}(x))'$ の微分公式を求めよ.

次の一連の問題の目的は, 公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が, 任意の有理数 a について成り立つことを証明することである.

2 【 a が自然数の場合】任意の自然数 n について $f_n(x) = x^n$ とおく. $f_n'(x) = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明せよ.

(I) $n = 1$ のとき.

$$f_1'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} =$$

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると, $f_k'(x) = kx^{k-1}$. いま, $f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから, 積の微分公式を用いて,

$$f_{k+1}'(x) = (f_1(x)f_k(x))' =$$

学籍番号： _____ 氏名： _____

3 【 a が負の整数の場合】商の微分公式を用いて $\left(\frac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ. それより $(x^{-n})'$ の微分公式を導け.

4 【 $a = 1/n$ の場合】 $f(x) = x^n$ とすると, 関数 $\sqrt[n]{x}$ は, 関数 $f(x)$ の逆関数である. すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である. 問題 1 で得られた逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$ であることを示せ. さらに, その結果を分数指数を用いて表すことにより $(x^{\frac{1}{n}})'$ の微分公式を導け.

5 【 a が有理数の場合】 $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ であることを用い, 合成関数の微分公式を用いて $(x^{\frac{m}{n}})'$ の微分公式を導け.

6] これまでに得られた微分公式のまとめ.

$$(f(x)g(x))' =$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$$

$$(f(g(x)))' =$$

$$(x^a)' =$$

7] 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 - 2)$

$$f'(x) =$$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

$$f'(x) =$$

c) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$$f'(x) =$$

d) $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) =$$

e) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^2$

$f'(x) =$

f) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

$f'(x) =$

g) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 5}$

$f'(x) =$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f'(x) =$