学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ は $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ をみたす．この両辺を微分し，それを逆関数の導関数 $\left(f^{-1}(x)\right)'$ について解くことにより，$\left(f^{-1}(x)\right)'$ の微分公式を求めよ．

次の一連の問題の目的は，公式 $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ が，任意の有理数 a について成り立つことを証明することである．

$\boxed{2}$ 【a が自然数の場合】任意の自然数 n について $f_n(x) = x^n$ とおく．$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明せよ．

(I) $n = 1$ のとき．

$$f_1{}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} =$$

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると，$f_k{}'(x) = kx^{k-1}$．いま，$f_{k+1}(x) = f_1(x) f_k(x)$ だから，積の微分公式を用いて，

$$f_{k+1}{}'(x) = \left(f_1(x) f_k(x)\right)' =$$

$\boxed{3}$ 【a が負の整数の場合】商の微分公式を用いて $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ．それより $(x^{-n})'$ の微分公式を導け．

$\boxed{4}$ 【$a = 1/n$ の場合】$f(x) = x^n$ とすると，関数 $\sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x)$ の逆関数である．すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．問題 1 で得られた逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ．さらに，その結果を分数指数を用いて表すことにより $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'$ の微分公式を導け．

$\boxed{5}$ 【a が有理数の場合】$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ であることを用い，合成関数の微分公式を用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ の微分公式を導け．

【裏に続く】

$\boxed{6}$ これまでに得られた微分公式のまとめ.

$\big(f(x)g(x)\big)' =$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' =$

$\big(f(g(x))\big)' =$

$\big(x^a\big)' =$

$\boxed{7}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

a） $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 - 2)$

$f'(x) =$

b） $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

$f'(x) =$

c） $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$f'(x) =$

d） $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 5}{\sqrt{x}}$

$f'(x) =$

e） $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^2$

$f'(x) =$

f） $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

$f'(x) =$

g） $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 5}$

$f'(x) =$

h） $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f'(x) =$